

GRG法による構造最適化に関する考察

愛媛大学工学部 正員 大久保 禎 二
愛媛県庁 正員 日野 富雄

1. まえがき

本研究は、これまでに提案されている数多くの非線形計画法の中で、近年その信頼性および有効性が指摘されているGRG法(Generalized Reduced Gradient法)を、構造設計におけるOptimizerとして利用した場合の解法の特徴および問題点について、数学モデルおよびトラス構造物に適用し種々検討した結果を述べるものである。

2. GRG法による最適化アルゴリズム

次の非線形最適化問題を考える

$$\text{目的関数: } f(X) \rightarrow \min, \quad \text{制約条件: } g_i(X) \leq 0 \quad (i=1, \dots, b), \quad l_j \leq X_j \leq u_j \quad (j=1, \dots, n) \quad (1)$$

GRG法では、不等号を有する各非線形条件式 $g_i(X)$ にスラック変数 X_{n+i} を導入して等号条件式とし、常にこの等号制約面上で最適解を探索する。この場合、 $(n+b)$ 次元の設計空間を考慮する必要があるが、GRG法では変数を n 個の独立変数 X_n と b 個の従属変数 X_b に分割し、 X_b は b 個の制約条件式により X_n の関数として決定されるものとし、つぎの X_n のみの最小化問題を導入する。

$$\left. \begin{array}{l} \text{目的関数} \quad F(X_n) = f(X_b(X_n), X_n) \rightarrow \min \\ \text{制約条件} \quad l_n \leq X_n \leq u_n \end{array} \right\} (1')$$

上式の $F(X_n)$ を独立変数 (X_n) について等号制約面上で減少させる方向 S_n を次式より決定する。

$$S_{nj} = 0 \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{if } X_{nj} = u_{nj} \text{ and } dF/dX_{nj} < 0 \\ \text{if } X_{nj} = l_{nj} \text{ and } dF/dX_{nj} > 0 \end{array} \right. \quad (2)$$

$$S_{nj} = -dF/dX_{nj} \quad \text{otherwise}$$

$$\text{ここに, } dF/dX_n = \partial f / \partial X_n - \partial f / \partial X_b \cdot \left(\frac{\partial g(X)}{\partial X_b} \right)^{-1} \left(\frac{\partial g(X)}{\partial X_n} \right) \quad (3)$$

$$\text{上記 } S_n \text{ の方向に, } X_n^{k+1} = X_n^k + \alpha S_n, \quad \alpha > 0 \quad (4)$$

として X_n を改良するとともに、 $g_i(X) = 0$ を満足するように X_b を Pseudo-Newton 法により改良する。

$$X_b^{k+1} = X_b^k - \left(\frac{\partial g(X)}{\partial X_b} \right)^{-1} \cdot g(X_b^k, X_n^{k+1}) \quad (5)$$

上式の X_b の改良過程で、 X_b の k 番目の成分がその上下限を越える場合には、 $X_{bk} = u_{bk}$ 又は l_{bk} として X_n の成分に組み入れ、かわりに X_n の中より

$$\left| \left(\frac{\partial g}{\partial X_b} \right)^{-1} \cdot \left(\frac{\partial g}{\partial X_n} \right)_{(i,j)} \right| \cdot \min \{ (X_n - l_n)_i, (u_n - X_n)_i \} \quad (6)$$

を最大にする i に対応する X_{ni} を新しい X_{bk} として入れかえる。最終的に $S_n = 0$, $S_b = 0$ の点で最適解が得られたことになる。GRG法による最適化のアルゴリズムを図-1に示す。

3. 数学モデルによる検討

図2および3に示す数学モデルにおいて、○印は S_n を計算した点、●印は一定の S_n のもとで α を変化させて直線

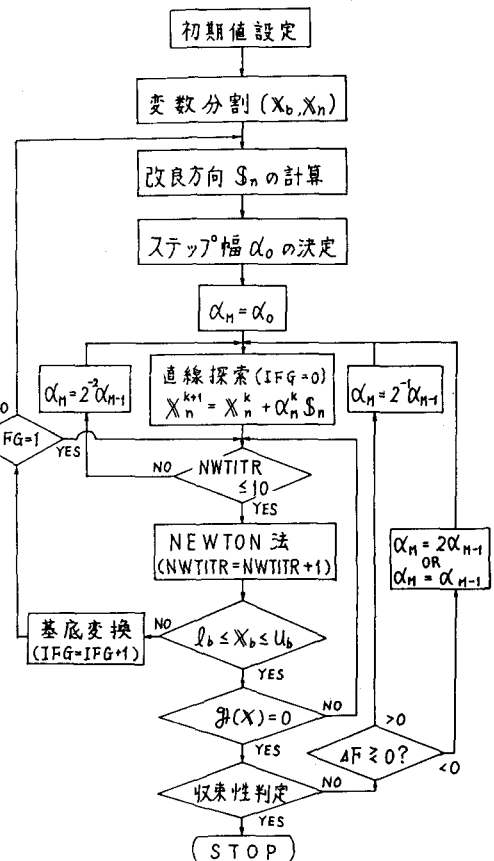


図-1 GRG法による最適化アルゴリズム

探索をした点、また●印における()内の数字は、 X_n^{k+1} からアクティブな制約条件面上の点に達するために必要とした Newton 法の反復回数を示している。最適解が制約条件群の交点にある場合(図-2)は、アクティブな制約条件にそって“へりがかり”をしないう比較的小さい回数での改良で最適解が得られ、制約条件の交点での違反した制約条件に対するステップ巾の修正も容易である。一方曲面上に最適解が存在する場合(図-3)には、適当なステップ巾の決定操作が複雑となり、最適解の近傍で数回のジブザグをくり返して最適解に達している。また曲面制約条件では、ステップ巾が大きいと探索点が曲面より大きく離れ、Newton 法により曲面上に戻す反復回数が多くなり、それだけ g を計算する回数が増加する。しかし g の各ステップ毎に Δh を計算する場合には、さらに多くの偏微係数の計算が必要となる。

4. トラスの最適設計例

図-4に示す6部材トラスの種々のたわみ制限値における最少重量設計を行った結果を表-1に示す。このトラスの設計例においては、 Δh 方向に変数を改良する場合、最初に境界に達する制約条件 j のスラック変数が0となるように $\alpha_0 = X_{\text{slack } j} / S_{\text{slack } j}$ としてステップ幅を決定した。この方法により、応力に関する制約条件が支配的となる設計問題では α のステップ回数が減少し、比較的有效な方法となるが、たわみ制限が支配的となる設計問題では必ずしも有効な方法とはならない。最適解を得る過程は3でのべた数学モデルと同様となるが、たわみ制限が支配的となる問題においては、 Δ を決定する偏微係数の計算に加えて、構造解析の必要回数が飛躍的に増大しており、このことは大規模な構造物の最適設計を行う場合の大きな欠点となるものである。

5. まとめ

上でのべた GRG 法による最適化アルゴリズムを、構造設計における Optimizer として利用した場合の特徴および問題点をまとめると次のごとくになる。(1) GRG 法は一種の射影法であり、変数の改良過程で常に許容解を得ることができる。また最適解を得るまでの改良方向(Δ)の算定回数(偏微係数の算定回数)は比較的小なくてすむ。(2) しかし、Pseudo-Newton 法などにより、常に $g(\mathbf{X})=0$ の制約面上に改良点を移す必要があり、このために必要とする $g(\mathbf{X})$ の計算回数(構造解析の回数)は、他の Optimizer と比較してかなり増加する。この傾向は設計変数が増加するに従い、また一つの制約曲面上に最適解が存在する場合に特に著しくなる。(3) 1制約曲面上で、変数の改良方向 Δ に目的関数を減少させつつ変数を移動させるステップ幅の決定法が複雑となり、かつ、ステップ幅が小さいと $g(\mathbf{X})$ の計算回数が増加する。(4) GRG 法では、常にすべての制約条件および原設計変数とスラック変数を考慮しているので設計変数の次元が大きくなり、かつ、独立変数(X_n)と従属変数(X_b)との変換のアルゴリズムも複雑になる。

表-1 6部材トラスの最適解及び改良過程

$\Delta a =$ (cm)	A _{opt} (cm ²)						(A _{opt}) (kg)	反復回数		
	A ₁	A ₂	A ₃	A ₄	A ₅	A ₆		Δ	$f(\mathbf{X})$	$g(\mathbf{X})$
0.7	12.126 (σ)	24.252 (σ)	15.152 (σ)	12.126 (σ)	15.148 (σ)	10.676 (σ)	10203.06	7	10	29
0.55	12.126 (σ)	24.252 (σ)	15.152 (σ)	12.126 (σ)	16.732 (δ)	11.843 (δ)	10543.96	5	22	73
0.5	12.540 (δ)	27.197 (δ)	17.515 (δ)	12.540 (δ)	17.991 (δ)	13.381 (δ)	11587.00	9	16	67

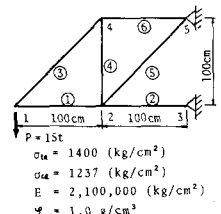


図-4 6部材トラス

参考 1) L.S.Lasdon and A.D.Waren ; "Generalized Reduced Gradient Software for Linearly and Nonlinearly Constrained Problems"
文献 2) J.Abadie and J.Carpentier ; "Generalization of the Wolfe Reduced Gradient Method to the Case of Nonlinear Constraints"