

SQPにおける最小化アルゴリズムの検討

愛媛大学工学部 正員 大久保 禎 二
和歌山県庁 正員・松原 光 宏
建設省 島本 卓 三

1. まえがき

著者らはこれまでに構造設計における最適な意思決定を行うために有効に利用し得る *Optimizer Sub-routine Library* を作成することを目的として、種々の非線形最適化アルゴリズムの検討を行っている。本研究はこのテーマの一環として、近年Powellらによって提案され、数多くの非線形計画問題の解法の中でもきわめて有効な方法とされる逐次二次計画法(SQP法)と可変計量法に基づく最適化の方法について考察を行うとともに、トラス構造物の最適設計問題に適用した例を示し、その有効性について検討した結果について述べるものである。

2. 最適化アルゴリズムの概要

二次計画問題の導入 本論文で述べる最適化アルゴリズムでは、まず非線形の問題

$$\text{目的関数: } F(X) \rightarrow \min, \quad \text{制約条件: } g_i(X) \geq 0 \quad (i=1, \dots, m), \quad \text{設計変数: } X = [X_1, X_2, \dots, X_n]^T \quad (1)$$

を X^k のまわりで二次計画問題に近似する。

$$\begin{aligned} \min \quad & Q(S) = f^T S + \frac{1}{2} S^T B S, \quad \text{ここに, } f = \nabla F(X^k), \quad S = X - X^k \\ \text{subject to} \quad & A S + g(X^k) \geq 0, \quad A = [\nabla g_1(X^k), \dots, \nabla g_m(X^k)]^T, \quad B = \text{正定値行列} \end{aligned} \quad (2)$$

改良方向 S の決定 つぎに、式(2)の二次計画問題を解き、改良方向 S を求める必要があるが、本研究では勾配射影法によりこの S を決定した。この場合、 S の許容初期値 S^0 は、

$$S_i = S_i' - S_i'', \quad S_i' \geq 0, \quad S_i'' \geq 0 \quad (i=1, \dots, n) \quad (3)$$

とし、 S_i として負の値もとれるように変数の変換を行い、式(2)の中で違反している制約条件のスラック変数と実変数との基底変換を行うことにより決定した。この方法により、初期基底解は式(2)の制約面上の点となる。 S が active な制約面上の点(S^1)に達すると、 $-\nabla Q(S^1)$ の active な線形制約面上への直交射影は次式より得られる。

$$d = -\{I - A_g^T (A_g A_g^T)^{-1} A_g\} \nabla Q(S^1) \quad (4)$$

ここに、 I : 単位行列、 A_g : 点 S^1 における active な制約条件の S にかかる係数

$S^{i+1} = S^i + \beta^i d^i$ として、式(2)の $Q(S)$ を d の方向に最小化する。 S のステップ幅 β は次式より決定される。

$$\beta = \min(\beta^{(1)}, \beta^{(2)}), \quad \beta^{(1)} = -\frac{d^T \nabla Q}{d^T B d}, \quad \beta^{(2)} = \min \left\{ -\frac{A_i S + C_i}{A_i d} \mid A_i d < 0, A_i S + C_i > 0 \right\} \quad (i=1, \dots, m) \quad (5)$$

改良された点 S^{i+1} において active な制約条件を決定し、再び式(4)により d を求める。このようにして S の改良を繰り返す。 r 回の改良により、改良方向 S^r は次式より求められる。

$$S^r = S^1 + \sum_{j=1}^r \beta^j d^j \quad (6)$$

λ_g の算定 点 S^r で active となる制約条件に対するラグランジュ乗数 λ_g^r は次式より計算される。

$$\lambda_g^r = (A_g A_g^T)^{-1} A_g \nabla Q(S^r) \quad (7)$$

上式で求めた λ_g^r がすべて非負であり、かつ $d^r = 0$ であれば S^r の点が最適点となる。しかし、 λ_g の成分で負になるものがあれば、その絶対値が最大のものに対応する制約条件を A_g から取り除き $g = g-1$ とし、式(4)により d を求めなおす。なお、 S^r で active とならない制約条件に対するラグランジュ乗数は 0 となる。

変数の改良幅の決定 改良方向 S^r を式(6)より決定すると、つぎに変数 X の改良ステップ幅 α を決定する。

$$X^{k+1} = X^k + \alpha^k S^r \quad (8)$$

S^r が十分小さい場合には最適解が得られたことになるが、 S が大きい場合には、目的関数を減少させ、かつ、制約条件も満足させるように次の関数を減少させる X^{k+1} (すなわち α^k) を決定する。

$$P(X^{k+1}, U^k) = P(X^k + \alpha \delta^k, U^k) = F(X^{k+1}) + \sum_{i=1}^m \mu_i^k |\min(0, g_i(X^{k+1}))| \quad (9)$$

ここで、 $K=0 \cdots \mu_i^0 = |\lambda_i^0|$, $K \geq 1 \cdots \mu_i^K = \max\{|\lambda_i^K|, \frac{1}{2}(\mu_i^{K-1} + |\lambda_i^K|)\}$

本研究では、 $P(X^{k+1}, U^k)$ を α の 2 次関数に近似し、その最小点 $\alpha \min$ 、あるいは $P(X^{k+1}, U^k) < P(X^k, U^k)$ となる α を用いた。

B の修正 改良点 X^{k+1} が最適点でない場合には、式(2)の目的関数の 2 次の偏微係数行列 B を、つぎのラグランジュ関数

$$L(X, \lambda) = F(X) - \lambda^T g(X) \quad (10)$$

の X に関する 2 次の偏微係数マトリックスの近似として、BFGS 公式を用いて修正し、再び式(2)~(9)により X の改良を行う。

$$B^{k+1} = B^k - \frac{B^k \delta^T \delta^T B^k}{\delta^T B^k \delta} + \frac{\eta \eta^T}{\delta^T \eta} \quad (11)$$

ここに、

$$\delta = X^{k+1} - X^k$$

$$\eta = \theta \delta + (1-\theta) B^k \delta, \quad 0 \leq \theta \leq 1, \quad \theta = \begin{cases} 1 & \delta^T \delta \geq 0.2 \delta^T B^k \delta \\ \frac{0.8 \delta^T B^k \delta}{\delta^T B^k \delta - \delta^T \delta}, & \delta^T \delta < 0.2 \delta^T B^k \delta \end{cases}$$

3. トラスの最適設計例および考察

2 で述べた最適化アルゴリズムにより、応力制限およびたわみ制限を考慮した種々のトラスの最小重量設計を行った。図-1 に示す 10 部材トラスの目的関数の収束状況を図-2 に、初期値、最適値、反復回数等を表-2 に、 $\delta_a = 0.3 \text{ cm}$ の場合の式(7)の λ の収束状況を表-1 に示す。表-2 において、 A_{opt} の数値の横に (s), (d), (Am) とあるのは、それぞれ各断面の最適値が、応力制限、たわみ制限および最小断面寸法の制限により決定されていることを示す。また、N, SENS, CAL は最適解を得るまでに必要とした $F(X)$, $g(X)$ の設計変数に対する偏微係数の計算回数を示す。この回数が反復回数 (ITER) より少ないのは、設計変数の変化量 ($\alpha^k \delta^k$) が 5% 以内の場合、偏微係数の値として前回の値を用いたためである。なお、設計変数としては各部材の断面積の平方根 ($\sqrt{A_i}$) を用いている。

本研究の最適化アルゴリズムの特徴をまとめると次のとおりである。① 設計変数の数が多くなるに従い、最適解を決定するために必要とする反復回数は増加するが、いかなる初期値からでも超 1 次の収束性が得られる。ただし、多部材トラスでたわみ制限が支配的となる場合には、さらにアルゴリズムの検討が必要である。② 設計変数の各反復改良毎に必要な構造解析の量は、原則的に $\nabla g(X)$ および式(9)の $P(X^{k+1}, U^k)$ を 2 次関数近似するための 1 回の構造解析のみと少ない。③ 最適解を決定する過程で、人為的に調整すべき振動パラメータが存在しないので、アルゴリズムの信頼性が高く、一般の構造物の最適設計にきわめて有効な、汎用性のある Optimizer として利用することができる。

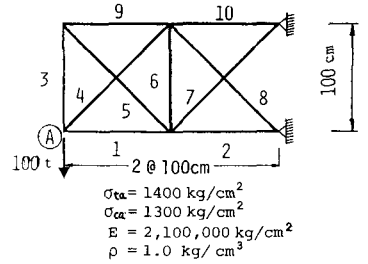


図-1 10部材トラス

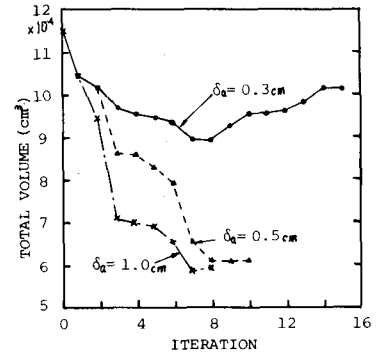


図-2 目的関数の収束過程

表-1 λ の収束過程 ($\delta_a = 0.3 \text{ cm}$)

ITER.	0	3	4	7	8	15
λ_1	11.01	37.11	0.0	3.67	0.0	0.0
λ_2	0.0	2.41	0.0	2.31	0.0	0.0
λ_3	23.18	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
λ_4	0.0	28.35	5.39	0.0	0.0	0.0
λ_5	30.36	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
λ_6	3.98	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
λ_7	12.99	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
λ_8	17.84	46.56	263.23	13.72	0.0	0.0
λ_9	23.18	26.67	0.0	0.0	0.0	0.0
λ_{10}	0.0	0.0	456.18	0.0	0.0	0.0
λ_{11}	94.31	85.80	278.77	211.55	251.89	358.92

表-2

初期値 (A_0), 最適値 (A_{opt}), 反復回数 (ITER, N, SENS, CAL)

δ_a	1.0cm (at A)	0.5cm (at A)	0.3cm (at A)
INITIAL A_0			
1	100.0 (cm ²)	50.0 (cm ²)	100.0 (cm ²)
2	100.0	100.0	100.0
3	100.0	80.0	100.0
4	100.0	120.0	100.0
5	100.0	100.0	100.0
6	100.0	40.0	100.0
7	100.0	70.0	100.0
8	100.0	90.0	100.0
9	100.0	100.0	100.0
10	100.0	50.0	100.0
Optimum A_{opt}			
1	76.47 (s)	76.50 (s)	76.49 (s)
2	77.38 (s)	77.38 (s)	77.37 (s)
3	0.64 (Am)	0.64 (Am)	0.64 (Am)
4	100.41 (s)	100.46 (s)	109.65 (s)
5	0.64 (Am)	0.64 (Am)	0.64 (Am)
6	0.64 (Am)	0.64 (Am)	0.64 (Am)
7	0.64 (Am)	0.64 (Am)	0.64 (Am)
8	108.08 (s)	108.12 (s)	108.17 (s)
9	0.64 (Am)	0.64 (Am)	0.64 (Am)
10	142.43 (s)	142.43 (s)	159.56 (s)
TVOL (cm ³)	59486.4	59500.4	61218.5
ITER.	8	10	10
N, SENS, CAL.	8	8	8