構造物の最適設計における双対性に関する一考察

京都大学工学部　正　員　山田　善一
山口大学工学部　正　員　○古川　浩平
京都大学工学部　　　　　大本　修

1．まえがき

構造物の最適設計は、定式化の際に目的関数を重量にするか荷重にするかで、最小重量設計と最大荷重設計の２つの最適化問題に分けられる。本研究は、構造物の最適設計を設計変数空間だけでなく、重量（コスト）と荷重の軸を用いた平面（W－P平面）に写像することにより、幾何学的観点から考察を加え、両問題の双対性を明らかにしたものである。

2．最適化問題の定式化

最小重量設計および最大荷重設計は、それぞれ次式で表わせる。

$$\text{最小重量設計}\begin{cases} W(x) \rightarrow \min \\ \quad \text{subject to} \quad P(x) \geqq p \\ \quad\quad x \in X \end{cases}$$

$$\text{最大荷重設計}\begin{cases} P(x) \rightarrow \max \\ \quad \text{subject to} \quad W(x) \leqq w \\ \quad\quad x \in X \end{cases}$$

W（x）；重量
P（x）；荷重
x　　；設計変数ベクトル
X　　；状態変数，設計変数の制約を満たすxの集合
w，p　；重量，荷重の与えられた許容値

ここでは、重量，荷重は、設計変数によって決定されることから、W（x），P（x）という表現を用いる。

3．計算例と双対性の幾何学的解釈

静的外力問題の例として、図１に示す長方形断面をもつ単純ばりの最小重量設計を考える。このとき以下のような制約を用いる。

A）最大たわみδは、０．０３ｍ以下である。
B）曲げによる最大応力σは、１．４×１０⁴　ｔ／㎡以下である。
C）はり幅ｂは、０．１ｍ以上である。
D）はりせいｈは、０．６ｍ以下である。

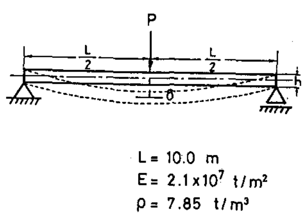

図１　単純ばりの設計モデル

A）～D）の制約を満たす設計空間を、荷重Ｐ＝２０ｔの場合について設計変数空間に描くと図２になる。この設計空間で、荷重Ｐ＝２０ｔに対する最適解（最小重量）を求め、W－P平面に写像する。同じ手順をＰが小さい値から大きい値へ繰り返すと図３が得られる。これを利用して、最小重量設計，最大荷重設計を示したのが、図４である。図４の設計空間の下限は単調増加曲線であり、この問題では、一方の問題から得られた最適解を、

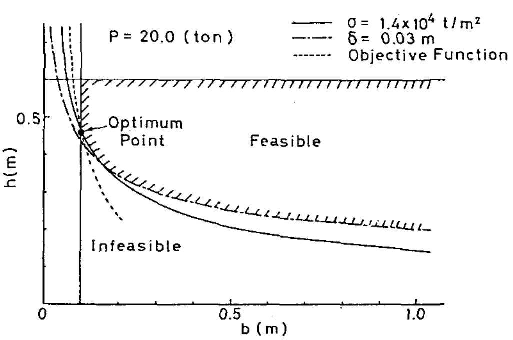

図２　Ｐ＝２０ｔの場合の設計変数空間（はり）

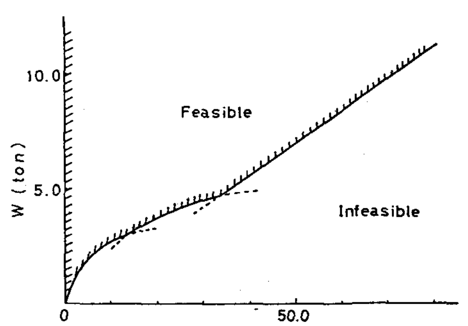

図３　W－P平面における設計空間（はり）

もう一方の問題で制約条件とした場合、両問題の最適点(Optimum point)は一致することがわかる。

次に、動的外力問題の例として、図5のタワーピアー系を考える。[1] ここでは、解析モデルおよび解析方法については省略する。設計変数として、タワーの断面2次モーメントＩ，ピアーの橋軸方向幅 b_2 を考え、他の変数は、関数関係を仮定した概算的方法で決定する。また目的関数は、次式で与える。

$W = W_T + \kappa W_P$　　W_T ，W_P ；タワー，ピアーの重量
　　κ ；タワーとピアーのコスト比

制約は以下のものを考える。

a）地震時におけるタワーの縁応力σは、2.6×10^4 t／m² 以下

b）地震時におけるピアーの頂点変位Ｘは、０．０５ｍ以下

c）タワーの全体座屈　　Ｐｗ ；タワー頂鉛直荷重
　$P_w - P_{cr}/2.0 \leq 0$　　Ｐcr；座屈荷重

d）底面における自重と地震力の合力の位置（ピアー転倒規準）
　$\ddot{z}_{max}/g - 2b_2/(3h_P) \leq 0$　　$\ddot{z}_{max}$;地震の最大加速度

ここで、地盤の弾性定数$E = 10^5$ t／m²，$\kappa = 0.2$を用いて、a）～d）の制約を満たす設計空間を、$\ddot{z}_{max} = 200$ gal として設計変数平面に描くと、図6になる。図6の設計空間は明らかに凹な空間である。これを図3と同じ手法でW－P平面に写像した結果が図7である。元の設計空間は凹であっても、このW－P平面上の設計空間の下限は単調増加となり、最適構造物においては外力の増大に応じて重量が増加すること（またはその逆）を意味している。このような動的外力下の問題でも，最小重量設計，最大荷重設計の両問題は同じ最適解となること、つまり双対性が成り立つことは明らかである。これらの図より分かるように、本研究で示した例のような不等号制約下での最適化問題では、常に双対性が成り立つことがわかる。

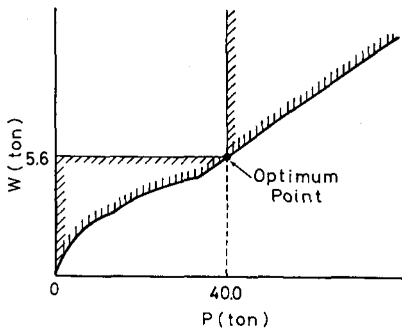

図４　最小重量設計と最大荷重設計の図示

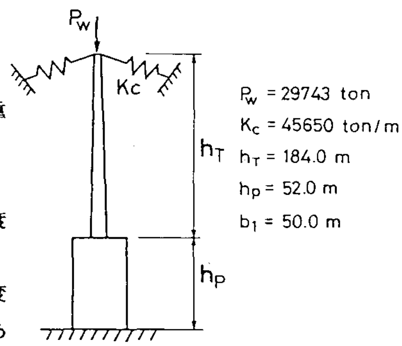

図５　タワーピアー系のモデル

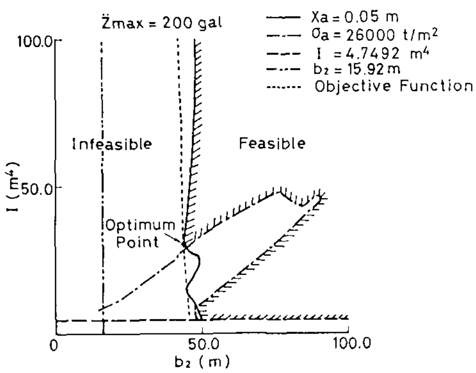

図６　$\ddot{z}_{max} = 200$ gal の場合の設計変数空間（タワーピアー）

4　まとめ

本研究より、最小重量設計と最大荷重設計の双対性は、不等号制約下では常に成り立つことが明らかになった。よって、設計のおかれている状況によって両手法のうち定式化しやすい一方を適宜使いわけることができる。また両問題で定式化し最適設計を行なうことで、最適解の正確さの確認が可能であると考えられる。

参考文献

1）山田善一，古川浩平：長大つり橋タワーピアー系の耐震設計における最適化手法の応用，第５回日本地震工学シンポジウム講演集，pp.1233-1240，1978年11月

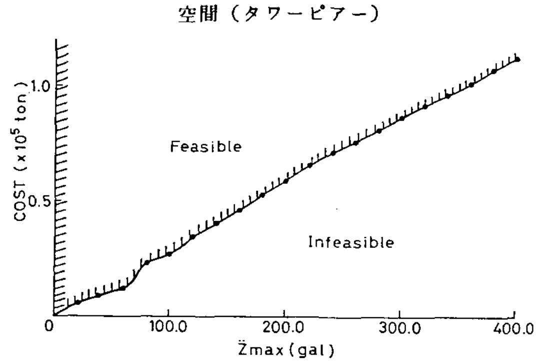

図７　W－P平面における設計空間（タワーピアー）