

ウェーブフロント法のための消去順序

岡山大学工学部 正員 谷口健男
岡山大学大学院 学生員 ○伊藤基平

1. 序論 近年、構造解析において、構造物の巨大化に伴い連立1次方程式の解法が問題となってきている。有限要素法においては、おもに直接法が用いられ、その中でも Gauss の消去法が広く用いられている。係数行列のスパース性を利用すれば、容量的、演算時間的に非常に有効であり、このような方法として、Band Matrix 法、Skyline(Profile) 法がある。また内部記憶容量を越えるような大次元の問題においては、Wavefront 法が用いられている。このような方法を有効に利用するため、消去順序付け(Renumbering)が必要となる。本報告では、Skyline 法および Wavefront 法のための新たな Renumbering Algorithm を提案する。

2. Renumbering のための基礎理論 外力ベクトルを b 、全体剛性行列を A 、節点変位ベクトルを x とすると、次のように表わされる。 $b = Ax$ (2.1) ここで、行列 $A(N \times N)$ の i 列の最初の非零要素の行番号を j とすると、半帯幅 B は、 $B = \max_{1 \leq i \leq N} (i - j + 1) = \max_{1 \leq i \leq N} b_i$ (2.2) と、表わされる。また、プロファイル P は、 $P = \sum_{i=1}^N b_i$ (2.3) で、表わされる。 i 行の active column を C_i で表わすと、最大フロント幅 W は、 $W = \max_{1 \leq i \leq N} C_i$ (2.4) で、表わされる。ここで、行列 A を対称であるとする、 $P = \sum_{i=1}^N C_i$ (2.5) と、表わされる。今、平均フロント幅 (W_{avg}) と 2 乗平均フロント幅 (W_{rms}) を次のように定義する。⁽¹⁾ $W_{avg} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N C_i = \frac{1}{N} P$ (2.6) $W_{rms} = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N C_i^2}$ (2.7) 直接法(消去法)は、前進消去と後退代入の 2 つの部分に分けられる。後退代入の演算時間は、元数に比例し、消去順序には無関係である。前進消去に要する演算時間は、次のように表わすことができる。⁽¹⁾ $T = \frac{1}{2} N W_{rms}^2 (T_0)$ (2.8) ここで、 N は行列 A の元数、 T_0 は機種による定数である。式(2.7)より、 $T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N C_i^2 (T_0)$ (2.9) と、表わされる。

Band Matrix 法においては、 $C_i = B$ として計算するため、次式で表わされる。 $T = \frac{1}{2} N B^2 (T_0)$ (2.10) Band Matrix 法、Skyline 法、Wavefront 法における演算時間(前進消去)と、行列 A の記憶容量を(表-1)に示す。それぞれの手法を有効に利用するため、最小にすべきものを(表-2)に示す。

表-1

	Band Matrix	Skyline	Wavefront
容 量	$N \cdot B$	$P = \sum_{i=1}^N C_i$	$W = \max_{1 \leq i \leq N} C_i$
演算時間	$T = \frac{1}{2} N B^2 (T_0)$	$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N C_i^2 (T_0)$	$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N C_i^2 (T_0)$

表-2

	Band Matrix	Skyline	Wavefront
容 量	$B = \max_{1 \leq i \leq N} b_i$	$\sum_{i=1}^N C_i$	$W = \max_{1 \leq i \leq N} C_i$
演算時間	$B = \max_{1 \leq i \leq N} b_i$	$\sum_{i=1}^N C_i^2$	$\sum_{i=1}^N C_i^2$

3. プロファイル最小化法 構造解析に用いられるモデルは形状により、(1)全体的に凹凸のない構造物、(2)突起をもつ構造物、の 2 つに大別される。(1)においては、帯幅最小化を行なうことによりプロファイルをも最小にすることができる。⁽⁴⁾しかし、(2)においては、本質的に帯幅最小化とプロファイル最小化は違ってくる。⁽⁴⁾よって、個別の Algorithm が必要となる。プロファイル中の零要素を L_0 で表わす。また、前進消去において、消去前・後を通じて零のものを Z 、消去後非零化するものを F で表わす。プロファイル最小化問題は、次式で表わされる。 $\min P \Rightarrow \min L_0 = \min (F + Z)$ (3.1) 突起をもつ構造物、有孔板等においては、グラフをいくつかの部分グラフに分割することにより、プロファイル最小化を行なえる。⁽²⁾また、(表-2)より、Wavefront 法においても、Skyline 法と同様に Renumbering が行なえることがわかる。次節においては、まず、新たなプロファイル減少 Algorithm を示し、そして Wavefront 法への適用法を示す。

4. Renumbering Algorithm の提案 文献(2)に示されているプロファイル減少法は非常によい結果を得ているが、次のような問題点がある。(1)入力データに制限がある。(2)2次元モデルにしか適用できない。ここで、入力データとしては、(1)節点数、(2)節点の最大次数、(3)節点の隣接関係、とし、3次元モデルにも適用できる汎用性のある Algorithm を提案する。まず、大きく分けて次の 3 つの部分より成り立っている。(1)出発点の決定、(2)連結グラフの作成、(3)番号付け。

(Algorithm 1) (図-1 参照)

A. George の修正による Pseudo-Peripheral Node を用いた。⁽⁵⁾Step. 1 最小次数の点 r より等距離節点集合 (level structure) を作成する。(レベルセット数: l)Step. 2 最終レベルセット内の最小次数の点より、再度 level structure を作成する。 $L(x) = \{L_1, L_2, \dots, L_k\}$ Step. 3 $l > k$ の場合、 $r = x$ とおいて、 $\rightarrow$ Step. 2Step. 4 r が出発点である。

(Algorithm 2)

Step. 1 r を N_1 に入れる。 $i = 1, j = k$ Step. 2 N_1 に隣接している " N_1 に属していない L_k の節点" を w とする。
 w を順に N_1 に入れる。 $w = \phi \rightarrow$ Step. 3Step. 3 $i = i + 1, j = j - 1, j = 0 \rightarrow$ StopStep. 4 " N_{i-1} に隣接している L_j の任意の節点" を N_i に入れる。Step. 5 N_i に隣接している " N_i に属していない L_k の節点" を w とする。
 w を順に N_i に入れる。 $w = \phi \rightarrow$ Step. 3これで、(図-2) に示すように main graph $\{N_1, N_2, \dots, N_k\}$ が作成できた。main graph に属さない節点は、突起あるいは、(図-4) に示すような穴まわりである。同様の方法で、sub graph $\{M_1, M_2, \dots, M_j\}$ を作成する。sub graph において、 N : 節点数、 L : レベルセット数、 P : パラメーターとして、 $L < N^P$ の場合、sub graph を main graph に組み込む。これは、どの程度の突起を分離グラフにするかということであり、通常、2次元の場合 $P = \frac{1}{2}$ 、3次元の場合 $P = \frac{1}{3}$ を用いる。また、(図-4) のような有孔板の場合、領域 II と領域 III の節点数を比較して、sub graph の方が大である場合は、入れかえる。

(Algorithm 3)

Step. 1 N_i より順に N_k まで番号を付ける。Step. 2 sub graph において、隣接している最小番号の点を w とする。 w の前に sub graph を組み込む。
このようにして、番号付けを行なった結果が (図-3) である。

(Wavefront 法への適用) Wavefront 法に必要なのは、要素番号順である。よって、まず要素-節点関係より節点の隣接関係を作成し、Renumbering を行ない、それより要素番号順を作成する。

5. 数値実験および考察 比較の対象としては、今日良く利用されている RCM 法と GPS 法を用いた。^{(3),(5)} GPS 法は RCM 法と同等の結果を得ることが知られている⁽¹⁾。よって、RCM 法は (Algorithm 1) を用いて出発点を固定し、演算時間の比較に用いた。

表-3 Comparison of Results

N	Average wavefront (P/N)				Max wavefront (W)				Rms wavefront (W _{rms})				CP time (×10 ⁻⁴ sec.)			形 状	
	Before	After GPS	After RCM	After New	Before	After GPS	After RCM	After New	Before	After GPS	After RCM	After New	GPS	RCM	New	突起	孔
99	9.1	7.6	9.0	8.0	32	11	16	13	28.4	11.5	13.7	12.5	77	27	29		
211	147.7	37.9	37.2	35.5	39	23	31	26	44.7	28.1	31.3	26.1	106	61	78	○	
414	11.5	7.5	11.1	6.6	127	29	29	29	125.8	27.5	27.7	26.3	420	130	180	○	

(表-3) これより、演算時間に関して

は、本手法は RCM 法の 1.0 ~ 1.4 倍程度で、GPS 法のようなばらつきはない。

突起、有孔においては、明らかに最良の

結果を得ている。よって、Skyline 法、Wavefront 法においては、本手法が最も有効であることがわかる。

参考文献 (1) Gordon C. Everstine, International Journal for Numerical Methods in Engineering, 14, 1979, PP. 837-853 (2) 谷口 他, 土木学会中四国支部昭和 37 年度学術講演会, I-13, 1982 (3) E. Cuthill et al, in Sparse Matrices and Their Applications, Plenum Press, 1972 (4) 白石 他, 土木学会論文報告集 第 294 号, 1980 年 2 月

PP. 15-24 (5) A. George, Lecture Note in Mathematics 572, Springer-Verlag, 1976, PP. 52-101

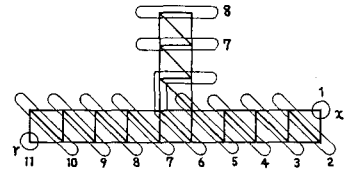


図-1 Algorithm 1

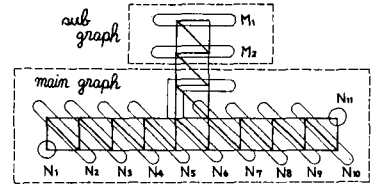


図-2 Algorithm 2

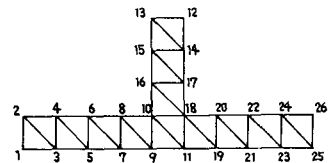


図-3 Algorithm 3

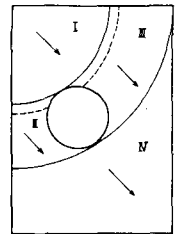


図-4