# エネルギー基準を用いた動的最適性規準法に関する一考察

山口大学工学部　正員　古川浩平
阿南工業高等専門学校　正員　○横田健一

## 1 まえがき

近年 電子計算機の発達に伴ない 構造物の最適化に関する非線形計画法が著しく発展し 数多くの研究が発表されている。しかしながら 構造物が大規模化し 設計変数の数や構造解析に必要な自由度が増大すると最適解への収束性や計算時間が莫大となり 実用性の面からも問題となってきた。

そこで 問題の規模や設計変数の数に関係なく敏速に収束する設計法が求められてきた。 その1つが最適性規準に基づく設計法である[1]。 筆者らは先に変位制約を受ける構造物に対する動的最適性規準[2]を導き それに基づいた最適化手法を示し その手法の有効性，収束性，汎用性などについて検討した。

本研究は 動的ひずみエネルギー，および 運動エネルギーをもとにして最適性規準を考え 動的変位が許容変位に収束するための最適化手法を示し タワー構造物を対象に数値計算を行ない 収束性などについて検討したものである。

## 2 エネルギー基準を用いた動的最適性規準

動的荷重をうける構造物の $i$ 要素の単位体積当りのひずみエネルギーと運動エネルギーの差 $\delta_i$ は次式で与えられる。

$$\delta_i = (x_i^t k_i x_i - \omega^2 x_i^t m_i x_i)/2V_i \qquad (1)$$

ここに $x_i, k_i, m_i, V_i$ はそれぞれ $i$ 要素の変位ベクトル，剛性マトリックス，質量マトリックス，体積であり $\omega$ は固有振動数である。 構造物の総重量 $W$ は次式で求められる。

$$W = \sum_i A_i l_i \rho_i = \sum_i V_i \rho_i \qquad (2)$$

ここに $A_i, l_i, \rho_i$ はおのおの $i$ 要素の断面積，要素長，比体積重量である。ここで $A_i, A_i'$ を最小重量設計の近傍の設計変数とすると 各構造物全体のひずみエネルギーと運動エネルギーの差 $E, E'$ は次式で求められる。

$$E = \sum_i V_i \delta_i = \sum_i A_i l_i \delta_i \qquad E' = \sum_i V_i' \delta_i' = \sum_i A_i' l_i \delta_i' \qquad (3)$$

$$\lim_{\Delta A \to 0} (E - E') = \lim_{\Delta A \to 0} \left\{ \sum_i A_i l_i \delta_i - \sum_i A_i' l_i \delta_i' \right\} = 0 \qquad (4)$$

$A_i'$ の断面を持つ構造物が $A_i$ の断面を持つ構造物の振動モードで振動したとすると 最小エネルギーの原理より

$$\sum_i A_i' l_i \delta_i \geqq \sum_i A_i' l_i \delta_i' \qquad (5)$$

極限状態を考えると式(4)より

$$\sum_i A_i' l_i \delta_i \geqq \sum_i A_i l_i \delta_i \qquad \therefore \sum_i (A_i' - A_i) l_i \delta_i \geqq 0 \qquad (6)$$

ここで 全要素の $\delta_i$ が一定であれば 明らかに $W' \geqq W$ となる。すなわち 最小重量設計を得るためには $\delta_i$ が全要素において一定となることが必要である。

## 3 エネルギー基準を用いた最適化手法

エネルギー基準を用いた最適化においては 式(1)の $\delta_i$ を全要素で等しくすることと 動的変位を許容変位に収束させることの2条件を満たす必要がある。

前者については 先に示した動的最適性規準[2] $\nu_i$ と $\delta_i$ の関係式を次のように導く。

$$\delta_i = C_i \nu_i = \frac{1}{2} \rho_i x_i^t m_i x_i \nu_i \qquad (7)$$

この $\delta_i$ を用いて 等変位下において全要素の $\delta_i$ が一定になるための断面変化 $\delta A_i$ を次式により決定する。

$$\delta A_i = \alpha(\mathcal{S}_i - \bar{\mathcal{S}}_i) \quad ここに\ \bar{\mathcal{S}} = \frac{\Sigma C_i l_i \rho_i \nu_i^2}{\Sigma l_i \rho_i \nu_i},\quad \alpha = max\{\beta \eta A_i / (\mathcal{S}_i - \bar{\mathcal{S}})\},\quad \eta = \sqrt{\Sigma(\mathcal{S}_i - \bar{\mathcal{S}})^2 / m} / \bar{\mathcal{S}} \tag{8}$$

後者については 次のように考える。単純な1自由度系構造物において その固有値λは次式で得られる。

$$\lambda = k/m \tag{9}$$

ここに $k$はバネ定数，$m$は構造物の質量である。断面変化による自重の変化は小さいとして無視すると λは断面2次モーメントの関数として次式で表わされる。

$$\lambda = C_1 EI / m l^4 \tag{10}$$

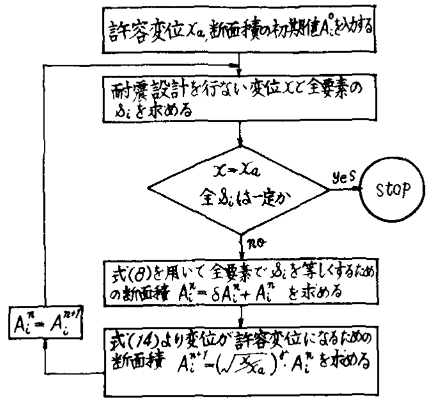
ここに $C_1$は構造物の支持条件によって決まる定数，$EI$は曲げ剛性 $l$は要素長である。また 断面2次モーメントは一般に断面積の関数として次式で表わされる。

$$I = C_2 A^2 \tag{11}$$

構造物の変位と固有値の関係式(12)と式(10),(11)より動的変位を許容変位に収束させるための断面は式(13)のように求められる。

$$\lambda x = \lambda_a x_a \tag{12}$$

$$A_a = \sqrt{x / x_a} \cdot A \tag{13}$$




図−1 最適化手法のフローチャート

ここに λは式(9)よりもまる固有値，$\lambda_a$は許容固有値，$x$は変位制約を課した点の変位，$x_a$はその点の許容変位である。収束性をよくするために過剰修正率$\gamma$を導入し 式(13)を次のように変形する。

$$A_i^{n+1} = (\sqrt{x / x_a})^{\gamma} \cdot A_i^n \tag{14}$$

以上の最適化手法をフローチャートに示すと図−1のようになる。

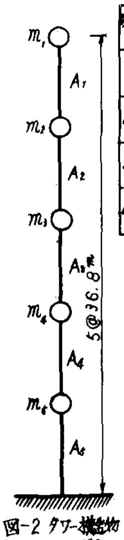
## 4 数値計算例，および，考察

本手法の収束性を検討するため 図−2に示す5要素のタワー構造物を対象に数値計算を行なった。表−1の例1,2は初期値を全要素とも 1.0$m^2$，例3,4は初期値を上部より 1.0$m^2$，2.0$m^2$，3.0$m^2$，4.0$m^2$，5.0$m^2$と変化させた場合の結果である。収束精度は1%,付加重量は各質点に100$^t$，頂点の許容変位を1.0$^m$，過剰修正率$\gamma$は1.5とする。

また 地震外力としては減衰2%の本四のスペクトル曲線を用い，その最大加速度は200galとする。

例−3 の収束過程を示すと図−3のようになる。いずれの場合も 少ない収束回数でなめらかに最適解を得ることができる。

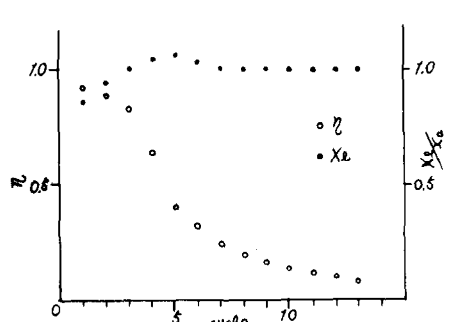
設計変数を多くした場合，収束精度を変えた場合も同様な結果が得られ 大規模な構造物に対しても有効だと思われる。




図−2 タワー構造物のモデル

表−1 最適化手法による収束状況

| 例 | 繰返数 | β | | 要素番号 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 変位 $x_a$(m) | 総重量 W(t) |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 16 | 0.3 | $A_i$ | 0.238 | 0.504 | 0.867 | 1.440 | 1.961 | 1.004 | 1444 |
| | | | $\mathcal{S}_i$ | 0.062 | 0.066 | 0.061 | 0.063 | 0.072 | | |
| 2 | 15 | 0.5 | $A_i$ | 0.238 | 0.504 | 0.867 | 1.439 | 1.972 | 1.006 | 1446 |
| | | | $\mathcal{S}_i$ | 0.070 | 0.066 | 0.061 | 0.063 | 0.072 | | |
| 3 | 13 | 0.3 | $A_i$ | 0.238 | 0.503 | 0.867 | 1.438 | 1.955 | 1.004 | 1444 |
| | | | $\mathcal{S}_i$ | 0.064 | 0.066 | 0.060 | 0.063 | 0.072 | | |
| 4 | 13 | 0.5 | $A_i$ | 0.245 | 0.503 | 0.863 | 1.438 | 1.975 | 1.006 | 1445 |
| | | | $\mathcal{S}_i$ | 0.069 | 0.065 | 0.061 | 0.062 | 0.071 | | |




図−3 例3の収束過程


参考文献 1) Venkayya, Khot, Tischler, Taylor : Design of Optimum structures for Dynamic Load, AFFDL-TR-71-160, DEC, 1973

2) 山田善一,古川浩平,横田健一 : 動的荷重下における変位を制約とする最適性規準法に関する研究 土木学会論文報告集，第324号，P 51~60，1982年8月