フリーネットワークにおける 不正則正規方程式の新しい解法

広島工業大学 正員 岡野兼夫

1. まえがき

旧来の測量における座標の精度は，絶対に与点の精度を越えることができなかった。そして，もし与点が無ければ，測量（座標決定）そのものが不可能であった。 しかし，1972年にドイツのミッターマイヤーが与点を必要としない測量法（フリーネットワーク法）を提唱して以来，ガウスから100年以上の長期にわたって変化が無かった測量誤差処理の体系が今や大変革を迫られつつある。 すなわち，精度10cmの与点から求点全点の近似座標を求め（これは旧測量法でよい），しかる後，与点求点の区別無く全点に座標修正を行うミッターマイヤー法（フリーネットワーク法）により，与点を含む全点の精度を，著しく向上した光波測距の精度に応じて3cm（最高1cm）に引上げる新しい測量方式が実用段階に入ろうとしている。 これによって土地の高価格化にともない高精度を要求される大規模な用地・地籍測量の条件を満たすと共に，大規模な土木工事測量も精度の向上が期待され，従来しばしば見られた設計と現地の不一致による部分的再測量などのトラブルを避け，能率を上げることができるであろう。 与点に関しても，精度の良い点（フリーネットワークの座標修正量＜3cm）を識別し，事故点（座標修正量大）を整理できるメリットがある。

ただし，ミッターマイヤー法には大きい欠点が存在し，それが10年来，フリーネットワークの実用化をさまたげて来た。 欠点の第1は，不正則正規方程式（係数行列式 $|N|=0$）の係数行列 N を区切って正則な範囲を発見する（すなわちランクを決定する）際に，明確な区切り線を決定し難く（正しいランクを定め難く）解を誤まる場合が出て来ることであり，さらに大きい第2の欠点は，フリーネットワークの2つのブロックの接合点＝共通点に関し，両方のブロックから異なる座標修正量が与えられて，その座標が確定しない現象である。 以上2つの問題点を解決しなければ，フリーネットワークを実用化し，公共測量に用いることは不可能であろう。

筆者はミッターマイヤー法のこのような問題点を解消すべく数年来研究を続け，全く新しい解法（岡野解）によってミッターマイヤー法が当面していた2つの問題点をほぼ解決することができたので，ここにその概要を発表させていただく次第である。

2. 岡野解の概念

筆者は，ミッターマイヤー法の難点を解決するため，不正則正規方程式の解の条件として新しい"岡野の条件" $\sum g_i x_i^2 \to min$ を用いることにした。x_i は正規式の根（未知数）で，近似座標に与える座標修正量を意味し，すべて小さい値である。ミッターマイヤーは $\sum x_i^2 \to min$ を条件として不正則正規式を解いたので，これは岡野の条件において $g_i=1$ と置いた特別の場合に該当すると言える。 すなわち岡野解において $g_i=1$ と置けば，根 x_i の値はミッターマイヤー解と全く同じになるであろう。 もし $g<1$（または $g>1$）と置けば，相応する x はミッターマイヤーの場合よりも大きく（または小さく）計算されるであろう。

思うに，何年か前の測量座標を近似座標とした場合，地盤変化の激しい点については，その近似座標の信頼度（重み）g が当然小さく，それにともなって座標修正量は大きく算定されるべきであり，反対に地盤変化の小さい点については近似座標の g が大きく，従って座標修正量は小さく算定されるべきであろう。

このような近似座標の重み g を導入すれば，ブロック接合の場合に，接合点 A の"近似座標の重み" g_A の値を適当な値に選んで両側ブロックから A に与えられる座標修正量を一致させることが可能となる。岡野の"第1解"は本解の前にこの g_A の適値を決定するのに役立ち，岡野の"第2解"は g_A その他の g_i を与えて後，ミッタ

ーマイヤー法で解を誤まるような場合にも，正確な座標修正量 x_i を定め，標準誤差の計算に不可欠な正しいランクを決定できる解法である。

3．不正則 n 元正規方程式に対する岡野の"第1解"

1) 与えられた正規式の最後の行を抹消し，最後の列と右辺の定数項を保留して残った係数行列 B の逆行列 B^{-1} を求め，その要素 β_{ij}《$i=1\sim(n-1)$，$j=1\sim(n-1)$》を確認する。3元正規式について説明すれば

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=u_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3=u_2 \\ a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3=u_3 \end{cases} \quad B=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \quad B^{-1}=\begin{bmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} \\ \beta_{21} & \beta_{22} \end{bmatrix}$$

対角要素 a_{ii} の相乗平均 $\sqrt[n]{a_{11}\cdot a_{22}\cdot\cdots\cdot a_{nn}}=a_0$

$\delta=a_0(0.1)^{\tau}$，δ は定数

τ：計算有効桁数の $1/2$

もし B が不正則ならば，$B_\delta=B+\delta\cdot E$ を作り B_δ^{-1} の要素として β_{ij} を確認する。τ に計算有効桁の $1/2$ を用い，δ は小さい定数となる。　E は単位行列である。

簡単に言えば，B_δ は B の対角要素へ一律に δ を加えた行列であり，B が不正則の時，B_δ は必らず正則となり，その逆行列 B_δ^{-1} を求めることができる。　こうして β_{ij} が定まれば，これを用い次のように根を計算する。

2) 最後の根

$$x_n=\frac{g_1A_1B_1+g_2A_2B_2+\cdots+g_{n-1}A_{n-1}B_{n-1}}{g_1A_1^2+g_2A_2^2+\cdots+g_{n-1}A_{n-1}^2+g_n}$$

x_n は g_i, A_k, B_k の関数 ---- $x_n=f(g_i,A_k,B_k)$

$$A_k=\sum_{i=1}^{(n-1)}\beta_{ik}a_{in} \qquad B_k=\sum_{i=1}^{(n-1)}\beta_{ik}u_i \qquad k=1\sim(n-1)$$

a_{in}：保留した最後の列の要素。ただし a_{nn} は用いない。

u_i：保留した右辺の定数項。ただし u_n は用いない。

その他の根 x_k は x_n を利用し，A_k，B_k を用いて次式で計算すればより。

$x_k=B_k-(x_n)A_k$　　　x_k も g_i，A_k，B_k の関数である ---- $x_k=g(g_i,A_k,B_k)$

（近似座標 X_1，Y_1，X_2，Y_2 ---- の修正量を順番に x_1，x_2，x_3，x_4 ---- としている）

$x_1=X_1$ の修正量
$x_2=Y_1$ の修正量 y_1
$x_3=X_2$ の修正量 x_2
$x_4=Y_2$ の修正量 y_2

3) ブロック接合点 A の近似座標の正しい重み g_A の計算

2つのフリーネットワークブロックの接合点（共通点）について，ブロックⅠから計算される x_A と，ブロックⅡから計算される x_A' を相等しくする条件式 $x_A=x_A'$ は g_A 以外の g_i がすべて与えられた場合は g_A の関数となる。またブロックⅠで計算される y_A とブロックⅡで計算される y_A' を等しくする条件式 $y_A=y_A'$ も同様に g_A の関数となる。（もちろん X_A の重みと Y_A の重みが等しく g_A であるとしなければならない）。

したがってこれらを連立して g_A について解けば，両側から計算される X_A の修正量を相等しくすると共に，同じく両側から計算される Y_A の修正量も相等しくするような X_A および Y_A の重み g_A を決定することができる。接合点が2点以上の場合はやや複雑となるが，同様な考え方で接合点近似座標の重みの適値を定めることが可能である。

4．不正則 n 元正規方程式に対する岡野の"第2解"

すべての g_i を与えなければならないが，根を求める手間が最も少ない解であり，標準誤差計算に不可欠なランクの正しい値を決定できる解法である。

1) 正規方程式の係数行列のランク r を，三角行列化などで推定する。そうして正規方程式の各行のうち r 個の行を残して他の行を抹消する。《対角要素にくらべて一般項が大きい行を先に抹消する》。不正則正規方程式のランク r は一般にその根数 n（行数 n，列数 n）よりも小さいから，残った正規式の行数はかなり少なくなるが，特に筆者が1977年に発表[*]した ϕ 方程式（平面では θ 方程式）を使用すれば r が最小となり，解を非常に簡易化することができる。《＊岡野兼夫：土木測量用の新しい観測方程式；土木学会(全国)1977の学術講演会》

2) 残った正規式の1行目の係数を a_i，2行目の係数を b_i ---- とし，各行1個ずつのパラメータ K_i を考え，下記のようなパラメータ正規式を作って K_i を定め，もとの正規式の根 x_i を計算する。($i=1\sim n$，$n>r$)

例（ランク $r=2$ の場合，2元となる）$r<n$

$$\begin{cases} \left[\frac{aa}{g}\right]K_1+\left[\frac{ab}{g}\right]K_2=u_1 \\ \left[\frac{ab}{g}\right]K_1+\left[\frac{bb}{g}\right]K_2=u_2 \end{cases}$$

定数項 u_i は，残った正規式の定数項をそのまま新しい番号で用いる。

パラメータ正規式はランク r と同じ元数(未知数)を持ち,常に正則となる特徴を有する。そこで n 元の正規式よりもずっと小さい r 元のパラメータ式を普通の方法(ガウス法など)で解き,もとの正規式の n 個の未知数を次式で求めることができる。 $x_i=(1/g_i)(a_i K_1+b_i K_2)$ $\quad i=1\sim n$

3) 以上と同様な解をランク数 $(r-1)$, $(r-2)$ についても行い,ランク数 r, $(r-1)$, $(r-2)$ の解の各々について,もとの正規式の"満足度"を検する。"満足度"とは,もとの正規式の各行へ根 x_i を代入して,それから右辺の定数項を減じた値 e_i を各行毎に求め, $\sum_{i=1}^{n} e_i$ を計算すればよい。この $\sum_{i=1}^{n} e_i$ が小さいほど,もとの正規式が良く満足されているわけであるから,正解として $\sum_{i=1}^{n} e_i \to min$ となる根 x_i の組とその x_i を得たランク数Fを採用する。 ミッターマイヤー法では,ランクを間違えば根も間違いの値となる。岡野の第1解ではランクと無関係に正しい根を得ることができるが,ランクを間違うと標準誤差が間違う結果になる。岡野の第2解は正しい根と正しいランクの組み合せを求めるので,このような心配が無い。

5. x_i の標準誤差計算《x_i(座標修正量)を与えた座標最確値の標準誤差計算》

1) n 元不正則正規方程式の係数行列 N の対角要素 a_{ii} に $(\delta \cdot g_i)$ を加えた行列 N_D を作る。(δ:前述)

2) $Q_x=N_D^{-1}\cdot N\cdot N_D^{-1}$ により Q_x 行列を作る。

3) Q_x の対角要素 α_{ii} を用いて,根 x_i の標準誤差(最確座標の標準誤差) σ_i を下式で求める。

$\sigma_i=\sigma_0\sqrt{\alpha_{ii}}$ 　観測方程式 $w_i+v_i=a_i x_1+b_i x_2+\cdots\cdots$ より $v_i=a_i x_1+b_i x_2+\cdots\cdots-w_i$

$\sigma_0=\sqrt{\dfrac{[pvv]}{m-F}}$ 　p_i:観測量 w_i の重み　m:観測方程式の個数　F:行列 N のランク数

楕円誤差が必要な場合は,正則方程式の場合と同様に Q_x 行列の要素から計算してよい。

《註1》 Q_x 行列を用いて,もとの正規方程式の根 x_i を計算することができる。すなわち $x_i=Q_x\cdot U$ (U はもとの正規方程式の定数項ベクトル),これは Q_x 自身の検算にはなるが,根 x_i の計算を Q_x だけで行えば,正確なランクFをつきとめることができず,推定ランクを用いれば標準誤差の計算を誤まる場合が出てくる。 同様に N_D^{-1} を用いて根 $x_i=N_D^{-1}\cdot U$ を計算することもできるが,この場合も,標準誤差計算に必要な正しいランク数Fをつきとめる良い方法が無い。 数学で周知のランク計算法は,測量の大きい方程式に実施してみると,うまくゆかない場合が多く,電算に向かないようである。 岡野の第2解は根と共に正しいランクを決定できる電算に適した解法である。

《註2》 N_D^{-1} を作る場合や N_D^{-1} を用いて Q_x を作る場合には,近似座標の重み g_i が必要であるから, $x_i=N_D^{-1}\cdot U$ および $x_i=Q_x\cdot U$ はいずれも岡野解をマトリックス表現したものと言える。そこでこれらをそれぞれ第3解,第4解と呼ぶことにしている。 何らかの方法で正規式の(正しい)ランクが既知な場合は,第3解,第4解によって根を求めて支障無い。

〔参考文献〕

Mittermayer: A Generalization of the Least-squares Method for the Adjustment of Free Networks; Bul. Geodesique (1972) pp. 139～157

岡野兼夫:測量における不正則正規方程式の新しい解法;広島工業大学研究紀要(1982) No. 20 pp. 191～197

岡野兼夫:土木測量用の新しい観測方程式;(1977)土木学会(全国)学術講演会

岡野兼夫:3次元図根点測量について;(1979)土木学会(中・四国支部)学術講演会

岡野兼夫:3次元図根点測量;広島工業大学研究紀要(1980) No. 18 pp. 141～152

岡野兼夫:3次元図根測量およびその応用;日本測量協会誌(1980) 30巻11号 pp. 28～33

岡野兼夫:3次元図根点測量 Part 2;広島工業大学研究紀要(1981) No. 19 pp. 153～163

フリーネットワークに好適な3次元測量に関する筆者の研究