

三次元弾性論による板の曲げ理論の検討

呉工業高等専門学校

正会員

丸上晴朗

1. まえがき

等方性平板の曲げ理論についてみると今日までに多くの人次によりいろいろな理論が発表されている。板厚が辺長にくらべて十分小さな薄板の微小たわみを対象にした曲げ理論の代表的なものに Kirchhoff 等による理論がある。

本文では簡単のためにこの理論を以下 Kirchhoff 理論という。この理論においては板の面に垂直な断面内に作用しているせん断応力による板の変形を無視しているが、この変形を考慮した理論のうちで最初に発表されたのは Reissner による理論（以下 Reissner 理論という）である。Kirchhoff 理論を少し改良した Reissner 理論は薄板はもちろん厚板にも適用できるものである。本文は上記の両理論により求めたたわみが三次元弾性論により求めたたわみとの程度一致するものかを検討することを主目的とする。三次元弾性論の理論解は単純な境界条件の場合でない。と求めるのが困難であるので、四辺を単純支持した長方形板の全面に等分布荷重を載荷した場合のたわみを考える。

2. KIRCHHOFF 理論によるたわみ

四辺が単純支持され強度 q の等分布荷重を全面に受る正方形板の中心（対角線の交点）のたわみ w は次式で表わされる。 $w = 0.00406 \frac{q a^4}{D}$ (1)

a は辺長で D は板の曲げ剛性で $D = \frac{E h^3}{12(1-\nu^2)}$ である。

3. REISSNER 理論によるたわみ

Reissner 理論を等分布荷重満載の四辺単純支持長方形板に適用した文献が管見の域にはないのでたわみを求める計算の骨子を示す。長方形板に対して図-1のように座標系を定める。たわみ曲面 w は次の偏微分方程式の解として与えられる。

$$\Delta \Delta w = q - \frac{h^2}{10} \frac{2-\nu}{1-\nu} \Delta q \quad (2)$$

ここに q は分布荷重強度であるが一定値でなくてもよい。 h は板厚、 $\Delta \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^4}$ 、 $\Delta \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ である。応力関数 ψ は (3) 式を満足する。 $\Delta \psi - \frac{10}{h^2} = 0$ (3)

(2) の解は、 $w = \frac{q}{24D} (x^4 - 2ax^3 + a^2x^2) + \sum_{m=1}^{\infty} (A_m \cosh \alpha_m y + B_m \sinh \alpha_m y + C_m \alpha_m y \sinh \alpha_m y + D_m \alpha_m y \cosh \alpha_m y) \sin \alpha_m x$ $1 - (-1)^m + A_m \cosh \alpha_m y + B_m \sinh \alpha_m y + C_m \alpha_m y \sinh \alpha_m y + D_m \alpha_m y \cosh \alpha_m y \sin \alpha_m x$ (4)

で与えられる。 $\alpha_m \equiv \frac{m\pi}{a}$ で、積分定数 A_m, B_m, C_m, D_m は後述する境界条件から求める。

(3) の解は、 $\psi = \sum_{m=1}^{\infty} (E_m \sinh \beta_m x + F_m \cosh \beta_m x) \cos \alpha_m y$ (5)

で与えられる。積分定数 E_m, F_m は後述する境界条件から求める。 $\beta_m \equiv \sqrt{\frac{10}{h^2} + (\frac{m\pi}{b})^2}$ 、 $\beta_m \equiv \frac{m\pi}{b}$ である。

以上の w, ψ を用いて板の面に垂直な断面内に作用する曲げモーメント M_x, M_y 、せん断力 Q_x, Q_y は次のように表わされる。

$$\left. \begin{aligned} M_x &= -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) + \frac{h^2}{5} \frac{\partial Q_x}{\partial x} - \frac{\nu h^2}{10(1-\nu)} Q_x, & Q_x &= -D \frac{\partial(\Delta w)}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial x} \\ M_y &= -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) + \frac{h^2}{5} \frac{\partial Q_y}{\partial y} - \frac{\nu h^2}{10(1-\nu)} Q_y, & Q_y &= -D \frac{\partial(\Delta w)}{\partial y} - \frac{\partial \psi}{\partial y} \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

境界条件は次の通りである。 $x=0: w=M_x=0, x=a: w=M_x=0, y=0: w=M_y=0, y=b: w=M_y=0$ (7)

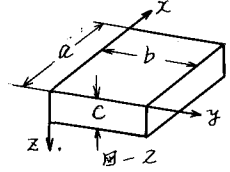
積分定数は6個で境界条件は8個あるが(4)式の w は $x=0$ で $w=0, x=a$ で $w=0$ なる条件式は恒等的に満している。従って残りの6個の条件式と(4)(5)式とから6個の積分定数を求めると次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} A_m &= \frac{2q}{a D \alpha_m^5} \{ (-1)^m - 1 \}, & B_m &= \frac{b q \{ (-1)^m - 1 \}}{4 a D \alpha_m^5 (5 + h^2 \alpha_m^2)} \left(\frac{10}{\alpha_m^2} - \frac{\nu h^2}{1-\nu} \right) \operatorname{sech} \frac{\beta_m b}{2} - \frac{2q}{a D \alpha_m^5} \{ (-1)^m - 1 \} \tanh \frac{\alpha_m b}{2} \\ C_m &= \frac{2q \{ (-1)^m - 1 \}}{2 a D \alpha_m^5 (5 + h^2 \alpha_m^2)} \left(\frac{10}{1-\nu} - \frac{\alpha_m^2}{\alpha_m^2} \right), & D_m &= \frac{2q \{ (-1)^m - 1 \}}{2 a D \alpha_m^5 (5 + h^2 \alpha_m^2)} \left(\frac{10}{\alpha_m^2} - \frac{\nu h^2}{1-\nu} \right) \tanh \frac{\alpha_m b}{2} \\ E_m &= \frac{2q(\nu-2)}{(1-\nu) b \beta_m^2} \frac{1 - (-1)^m}{\beta_m}, & F_m &= \frac{2q(\nu-2)}{(\nu-1) b \beta_m^2} \frac{1 - (-1)^m}{\beta_m} \tanh \frac{\alpha_m b}{2} \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

この A_m, B_m, C_m, D_m を(4)の右辺へ代入すると任意点 (x, y) のたわみ w を求めることができる。

4. 三次元弾性論の理論解による変位成分

長方形板に対して図-2のように座標系を定める。板を支持しているのは平面 $z=C$ 内であって $x=0, x=a, y=0, y=b$ においてである。この場合には厳密な三次元的境界条件ではないが次の条件が広く用いられている。但し任意点 (x, y, z) の x, y, z 軸方向の変位成分をそれぞれ u, v, w とする。 $x=0: \sigma_x=0, v=w=0$; $x=a: \sigma_x=0, v=w=0$; $z=0: \sigma_z=0, \tau_{xz}=\tau_{yz}=0$; $z=C: \sigma_z=\tau_{xz}=\tau_{yz}=0$



$$z=0: \sigma_z=0, \tau_{xz}=\tau_{yz}=0; z=C: \sigma_z=\tau_{xz}=\tau_{yz}=0 \quad (9)$$

自重を無視すると体積力 $\rho=0$ となつて力の釣合方程式は入 μ をラーメの定数として変位で示す次のようになる。
 $(\lambda+\mu)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \mu\Delta u = 0, (\lambda+\mu)\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \mu\Delta v = 0, (\lambda+\mu)\frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + \mu\Delta w = 0, \epsilon \equiv \epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \quad (10)$

(10)の第1, 2, 3式へそれぞれ $K_1 \equiv \cos \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \cos \frac{r\pi z}{c}, K_2 \equiv \sin \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{n\pi y}{b} \cos \frac{r\pi z}{c}, K_3 \equiv \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \sin \frac{r\pi z}{c}$ を乗じて3回連続して積分変換を行ひ式の変形には(9)の関係も必要に応じて用いる。すると $\bar{u}(m, n, r) \equiv \int_0^a \int_0^b \int_0^c u K_1 dx dy dz, \bar{v}(m, n, r) \equiv \int_0^a \int_0^b \int_0^c v K_2 dx dy dz, \bar{w}(m, n, r) \equiv \int_0^a \int_0^b \int_0^c w K_3 dx dy dz$ に関する連立一次方程式が得るのでこれを解き、逆変換を行つて u, v, w を求めることとなる。

$$\left. \begin{aligned} u &= \frac{1}{a} \int_0^a u dx + \frac{4}{abc} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{r=1}^{\infty} \cos \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \int_0^c \bar{u}(m, n, r) dz + \frac{8}{abc} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{r=1}^{\infty} \bar{u}(m, n, r) K_1 \\ &+ \frac{4}{abc} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{r=1}^{\infty} \sin \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{n\pi y}{b} \int_0^c \bar{v}(m, n, r) dz + \frac{8}{abc} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{r=1}^{\infty} \bar{v}(m, n, r) K_2, \quad w = \frac{8}{abc} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{r=1}^{\infty} \bar{w}(m, n, r) K_3 \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

$\int_0^c \bar{u}(m, n, r) dz, \int_0^c \bar{v}(m, n, r) dz$ を求めるためには(10)の第1, 2式へそれぞれ $\cos \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}, \sin \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{n\pi y}{b}$ を乗じて積分変換を行つと $\int_0^c \bar{u}(m, n, r) dz, \int_0^c \bar{v}(m, n, r) dz$ に関する連立方程式が得るのでこれを解けばよい。なお $\int_0^a u dx, \int_0^b v dy$ は等分布荷重満載のときにはともに0となるので上述のようにして求めた $\int_0^c \bar{u}(m, n, r) dz, \int_0^c \bar{v}(m, n, r) dz$ を(11)へ代入すると変位成分 u, v, w は次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} u &= -\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda C m B_{mn}}{a(\lambda+2\mu) b_{mn}^2} \cos \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} - \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ B_{mn} \{1+(-1)^m\} + B'_{mn} \{1-(-1)^m\} \right\} \frac{C m}{a(\lambda+2\mu) b_{mn}^2} \left\{ \frac{\lambda}{r^2 + b_{mn}^2} - \frac{2(\lambda+\mu)r^2}{(r^2 + b_{mn}^2)^2} \right\} \cos \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \cos \frac{r\pi z}{c} \\ v &= -\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda C m B_{mn}}{b(\lambda+2\mu) a_{mn}^2} \sin \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{n\pi y}{b} - \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ B_{mn} \{1+(-1)^m\} + B'_{mn} \{1-(-1)^m\} \right\} \frac{C m}{b(\lambda+2\mu) a_{mn}^2} \left\{ \frac{\lambda}{r^2 + a_{mn}^2} - \frac{2(\lambda+\mu)r^2}{(r^2 + a_{mn}^2)^2} \right\} \sin \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{n\pi y}{b} \cos \frac{r\pi z}{c} \\ w &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r}{b_{mn}^2} \left\{ B_{mn} \{1+(-1)^m\} + B'_{mn} \{1-(-1)^m\} \right\} \frac{r}{r^2 + b_{mn}^2} \left\{ 1 + \frac{2(\lambda+\mu)r^2}{(\lambda+2\mu)(r^2 + b_{mn}^2)} \right\} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \sin \frac{r\pi z}{c} \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

但し, $B_{mn} \equiv \frac{4}{\pi a b} \int_0^a \int_0^b ([w]_{z=0} - [w]_{z=c}) \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} dx dy, B'_{mn} \equiv \frac{4}{\pi a b} \int_0^a \int_0^b ([w]_{z=0} + [w]_{z=c}) \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} dx dy, b_{mn}^2 \equiv \left(\frac{C m}{a} \right)^2 + \left(\frac{C n}{b} \right)^2$ である。

B_{mn}, B'_{mn} は未知であるので $z=0$ と $z=C$ における u_z に関する境界条件を考慮して求める。このために $u_z = \lambda \epsilon + 2\mu \epsilon_z$ (4) を代入して u_z を求めることになる。しかし(12)をそのまま代入したのではFourier級数の不連続点 $z=C$ での境界条件を用いることになるのでこれを避けるために(12)の z に関するFourier級数を z に直して u, v, w を変形する。和を求めるには数学公式集を利用する。³⁾ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi \sin n x}{(n^2 + a^2)^2}$ の和は公式集にはないが $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi \sin n x}{(n^2 + a^2)^2} = \frac{\pi x \cosh a(x-\pi)}{4a \sinh a\pi} - \left(\frac{\pi}{\sinh a\pi} \right)^2 \frac{\sinh a x}{4a}$ となる最終的に u, v, w は次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} u &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{C m}{b(\lambda+2\mu)} (B_{mn} J_1 + B'_{mn} J_2) \cos \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \\ v &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{C n}{a(\lambda+2\mu)} (B_{mn} J_1 + B'_{mn} J_2) \sin \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{n\pi y}{b} \\ w &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{C}{b_{mn}^2} (B_{mn} J_3 + B'_{mn} J_4) \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

上の J_1, J_2, J_3, J_4 は次の通りである。 $J_1 \equiv \frac{\pi \mu \cosh \frac{x}{2} \sinh \frac{y}{2}}{b_{mn} \sinh \pi b_{mn}} \cosh \frac{r\pi}{2} \left(\frac{2z}{c} - 1 \right) + \frac{\pi^2 (\lambda + \mu)}{2C \sinh \pi b_{mn}} \left\{ 2z \cosh \frac{r\pi}{2} \sinh \frac{r\pi}{2} \left(\frac{2z}{c} - 1 \right) + C \sinh \pi b_{mn} \right\}$
 $- (\lambda + \mu) \left(\frac{\pi}{\sinh \pi b_{mn}} \right)^2 \cosh \frac{r\pi}{2} \cosh \frac{r\pi}{2} \left(\frac{2z}{c} + 1 \right), J_2 \equiv (\lambda + \mu) \left(\frac{\pi}{\sinh \pi b_{mn}} \right)^2 \sinh \frac{r\pi}{2} \sinh \frac{r\pi}{2} \left(\frac{2z}{c} + 1 \right) - \frac{\pi^2 (\lambda + \mu)}{2C \sinh \pi b_{mn}} \left\{ 2z \sinh \frac{r\pi}{2} \sinh \frac{r\pi}{2} \left(\frac{2z}{c} - 1 \right) - C \sinh \pi b_{mn} \right\}$
 $+ C \sinh \pi b_{mn} \frac{z}{c}, J_3 \equiv \frac{\pi}{\sinh \pi b_{mn}} \cosh \frac{r\pi}{2} \sinh \frac{r\pi}{2} \left(1 - \frac{2z}{c} \right) + \frac{\pi^2 (\lambda + \mu) \cosh \frac{r\pi}{2} \sinh \frac{r\pi}{2}}{2C \sinh \pi b_{mn}} \cosh \frac{r\pi}{2} \cosh \frac{r\pi}{2} \left(\frac{2z}{c} - 1 \right) - \frac{(\lambda + \mu) \cosh \frac{r\pi}{2}}{2C \sinh \pi b_{mn}} \frac{\pi}{\sinh \pi b_{mn}} \cosh \frac{r\pi}{2} \sinh \frac{r\pi}{2} \left(\frac{2z}{c} - 1 \right)$
 $+ 1, J_4 \equiv \frac{\pi}{\sinh \pi b_{mn}} \sinh \frac{r\pi}{2} \cosh \frac{r\pi}{2} \left(1 - \frac{2z}{c} \right) + \frac{(\lambda + \mu) \sinh \frac{r\pi}{2}}{2C \sinh \pi b_{mn}} \left(\frac{\pi}{\sinh \pi b_{mn}} \right)^2 \sinh \frac{r\pi}{2} \sinh \frac{r\pi}{2} \left(\frac{2z}{c} + 1 \right) + \frac{\pi^2 (\lambda + \mu) \sinh \frac{r\pi}{2}}{2C \sinh \pi b_{mn}} \left\{ 2z \sinh \frac{r\pi}{2} \sinh \frac{r\pi}{2} \left(1 - \frac{2z}{c} \right) - C \sinh \pi b_{mn} \right\}$ (14)

$$B_{mn}, B'_{mn} \text{ は次のようになる。 } B_{mn} = \frac{4\pi C (\lambda + 2\mu) (1 - (-1)^m) \{1 - (-1)^n\} \sinh \frac{r\pi}{2} \cosh \frac{r\pi}{2}}{\pi^2 \mu (\lambda + \mu) m n b_{mn} (\sinh \pi b_{mn} + \pi b_{mn})}, B'_{mn} = \frac{4\pi C (\lambda + 2\mu) \{1 - (-1)^m\} \{1 - (-1)^n\} \cosh \frac{r\pi}{2} \sinh \frac{r\pi}{2}}{\pi^2 \mu (\lambda + \mu) m n b_{mn} (\sinh \pi b_{mn} - \pi b_{mn})} \quad (15)$$

5. 計算例

一辺1mの正方形板の中心(前角線との交点)のたわみを板が無限大であるとして板厚 h だけ計算した結果を表-1の通りである。

6. あとがき

板厚10mm位までは三理論は大體一致した値を示している。辺長の影響もあると考えられるから辺長を変えて計算してみることも必要である。断面力についても計算が必要加ふ。

表-1 たわみの値(単位: mm)

板厚 (mm)	Kirchhoff	Reissner	三次元弾性論 (板厚の上面での値)
5	1.69×10^{-2} (×9)	1.70×10^{-2} (×9)	1.71×10^{-2} (×9)
10	2.11×10^{-3}	2.16×10^{-3}	2.20×10^{-3}
20	2.64×10^{-4}	2.86×10^{-4}	3.12×10^{-4}
30	7.82×10^{-5}	9.14×10^{-5}	1.10×10^{-4}
40	3.30×10^{-5}	4.19×10^{-5}	5.64×10^{-5}
50	1.69×10^{-5}	2.32×10^{-5}	3.52×10^{-5}

参考文献 1) Timoshenko & Krieger: Theory of Plates and Shells 2) Nomachi: On one method for solving three-dimensional stress problems by means of finite Fourier transformation 3) 森田川一: 板: 数学公式 II。