走行従動荷重を受ける梁の結合共振領域の特性指数を用いた計算法

山口大学　正員　　會　田　忠　義
〃　　　学生員○平　井　利　典
広島県　正員　　小　松　茂　生

<u>まえがき</u>　連続して走行する従動荷重を受ける梁の運動の攪乱方程式がHill型の方程式となり係数励振不安定振動が発生することをこれまでに示した。[1]　不安定振動中、特に単純共振（主共振，分数調波共振，高調波共振，高分数調波共振）の領域決定には Bolotin の方法が適用されてきた。係数励振不安定振動にはこの他に、結合共振があり、これらの領域の決定が必要となってくる。本研究は特性指数を用いた領域の決定法を示し、これまでの研究で明らかにされていない結合共振領域を示す。

<u>運動方程式と特性方程式</u>　連行従動荷重を受ける梁の運動の攪乱方程式は次式で表わされる。[1),2)]

$$\left[\mathbb{A} + \left\{\mathbb{A}_0 + \sum_{p=1}^{\infty}\left(\mathbb{A}_{1p}\cos p\omega_0 t + \mathbb{A}_{2p}\sin p\omega_0 t\right)\right\}\right]\ddot{\bar{f}} + \left[\mathbb{B} + P\left\{\mathbb{C}_0 + \sum_{p=1}^{\infty}\left(\mathbb{C}_{1p}\cos p\omega_0 t + \mathbb{C}_{2p}\sin p\omega_0 t\right)\right\}\right]\bar{f} = 0 \quad \cdots\cdots (1)$$

Floquet の定理によれば、周期係数をもつ微分方程式の一般解は、特性指数をλ、係数と同じ周期をもつ周期関数を $\varphi(t)$ とするとき、　$\bar{f} = e^{\lambda t}\varphi(t)$　で表わされる。[3),4)]今、$\varphi(t)$ を Fourier 級数で表わし、$\bar{f}$ を次式で与える

$$\bar{f} = e^{\lambda t}\left\{\frac{1}{2}a_0 + \sum_{\xi=1}^{\infty}\left(a_\xi \cos \xi\omega_0 t + b_\xi \sin \xi\omega_0 t\right)\right\} \quad \cdots\cdots (2)$$

ここで、a_0, a_ξ および b_ξ は時間に無関係なベクトルである。式(2) が式(1) の一般解であることより、式(2)を代入し調和バランス法を適用すると、a_0, a_ξ, b_ξ ($\xi = 1, 2, \cdots$) を未知数とする次の同次方程式が得られる。

$$\left\{-\omega_0^2\left([\mathbb{A}]_0 + \frac{1}{2}[\mathbb{A}_m]_0\right) + [\mathbb{B}] + \frac{P}{2}[\mathbb{C}] + 2\lambda\omega_0\left([\mathbb{A}]_1 + \frac{1}{2}[\mathbb{A}_m]_1\right) + \lambda^2\left([\mathbb{A}]_2 + \frac{1}{2}[\mathbb{A}_m]_2\right)\right\}\mathbb{X} = 0 \quad \cdots\cdots (3)$$

ここで、$\mathbb{X} = \{\cdots a_3, a_2, a_1, a_0, b_1, b_2, b_3 \cdots\}^T \cdots\cdots (4)$　であり、$[\mathbb{A}]_0, [\mathbb{A}]_1, [\mathbb{A}]_2, [\mathbb{B}], [\mathbb{C}], [\mathbb{A}_m]_0$ は次の内容をもつマトリックスである。（$[\mathbb{A}_m]_1, [\mathbb{A}_m]_2$ はここには省略する）

$$[\mathbb{A}]_0 = \begin{pmatrix} \ddots &&&&&& \\ & 2^2\mathbb{A} &&&&& \\ && 1^2\mathbb{A} &&& 0 & \\ &&& 0 &&& \\ & 0 &&& 1^2\mathbb{A} && \\ &&&&& 2^2\mathbb{A} & \\ &&&&&& \ddots \end{pmatrix} \quad [\mathbb{A}]_1 = \begin{pmatrix} &&&&&& \iddots \\ &&&&& 2\mathbb{A} & \\ & 0 &&& 1\mathbb{A} && \\ &&& 0 &&& \\ && -1\mathbb{A} &&& 0 & \\ & -2\mathbb{A} &&&&& \\ \iddots &&&&&& \end{pmatrix} \quad [\mathbb{A}]_2 = \begin{pmatrix} \ddots &&&&&& \\ & \mathbb{A} &&&&& \\ && \mathbb{A} &&& 0 & \\ &&& \frac{1}{2}\mathbb{A} &&& \\ & 0 &&& \mathbb{A} && \\ &&&&& \mathbb{A} & \\ &&&&&& \ddots \end{pmatrix}$$

$$[\mathbb{B}] = \begin{pmatrix} \ddots &&&&&& \\ & \mathbb{B} &&&& 0 & \\ && \mathbb{B} &&&& \\ &&& \frac{1}{2}\mathbb{B} &&& \\ & 0 &&& \mathbb{B} && \\ &&&&& \mathbb{B} & \\ &&&&&& \ddots \end{pmatrix}$$

$$[\mathbb{C}] = \begin{pmatrix} & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\ \cdots & (2\mathbb{C}_0 + \mathbb{C}_{14}) & (\mathbb{C}_{11} + \mathbb{C}_{13}) & \mathbb{C}_{12} & (\mathbb{C}_{23} - \mathbb{C}_{21}) & \mathbb{C}_{24} & \cdots \\ \cdots & (\mathbb{C}_{11} + \mathbb{C}_{13}) & (2\mathbb{C}_0 + \mathbb{C}_{12}) & \mathbb{C}_{11} & \mathbb{C}_{22} & (\mathbb{C}_{23} + \mathbb{C}_{21}) & \cdots \\ \cdots & \mathbb{C}_{12} & \mathbb{C}_{11} & \mathbb{C}_0 & \mathbb{C}_{21} & \mathbb{C}_{22} & \cdots \\ \cdots & (\mathbb{C}_{23} - \mathbb{C}_{21}) & \mathbb{C}_{22} & \mathbb{C}_{21} & (2\mathbb{C}_0 - \mathbb{C}_{12}) & (\mathbb{C}_{11} - \mathbb{C}_{13}) & \cdots \\ \cdots & \mathbb{C}_{24} & (\mathbb{C}_{23} + \mathbb{C}_{21}) & \mathbb{C}_{22} & (\mathbb{C}_{11} - \mathbb{C}_{13}) & (2\mathbb{C}_0 - \mathbb{C}_{14}) & \cdots \\ & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \end{pmatrix}$$

$$
[\mathbb{A}_M]_0 = \begin{pmatrix}
 & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\
\cdots & 2^2(2\mathbb{A}_0+\mathbb{A}_{14}) & 1^2(\mathbb{A}_{11}+\mathbb{A}_{13}) & 0 & 1^2(\mathbb{A}_{23}-\mathbb{A}_{21}) & 2^2\mathbb{A}_{24} & \cdots \\
\cdots & 2^2(\mathbb{A}_{11}+\mathbb{A}_{13}) & 1^2(2\mathbb{A}_0+\mathbb{A}_{12}) & 0 & 1^2\mathbb{A}_{22} & 2^2(\mathbb{A}_{23}+\mathbb{A}_{21}) & \cdots \\
\cdots & 2^2\mathbb{A}_{12} & 1^2\mathbb{A}_{11} & 0 & 1^2\mathbb{A}_{21} & 2^2\mathbb{A}_{22} & \cdots \\
\cdots & 2^2(\mathbb{A}_{23}-\mathbb{A}_{21}) & 1^2\mathbb{A}_{22} & 0 & 1^2(2\mathbb{A}_0-\mathbb{A}_{12}) & 2^2(\mathbb{A}_{11}-\mathbb{A}_{13}) & \cdots \\
\cdots & 2^2\mathbb{A}_{24} & 1^2(\mathbb{A}_{23}-\mathbb{A}_{21}) & 0 & 1^2(\mathbb{A}_{11}-\mathbb{A}_{13}) & 2^2(2\mathbb{A}_0-\mathbb{A}_{14}) & \cdots \\
 & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots &
\end{pmatrix}
$$

X、すなわち、式(2)の係数がゼロ以外の値をもつためには、式(3)の行列式がゼロでなければならない。

$$
\left| -\omega_0^2([\mathbb{A}]_0+\tfrac{1}{2}[\mathbb{A}_M]_0)+[\mathbb{B}]+\tfrac{P}{2}[\mathbb{C}]+2\lambda\omega_0([\mathbb{A}]_1+\tfrac{1}{2}[\mathbb{A}_M]_1)+\lambda^2([\mathbb{A}]_2+\tfrac{1}{2}[\mathbb{A}_M]_2) \right| = 0 \quad \text{----} \quad (5)
$$

上式が特性方程式である。

Xが存在するためλが上記行列式の固有値として計算される。すなわち、あるω_0とPの値に対しての固有値$\lambda=\alpha\pm\beta i$が算出される。安定、不安定の判定は、$\alpha>0$のとき不安定、$\alpha\leqq 0$のとき安定とする。不安定領域の境界の計算は$\omega_0\sim P$平面においてαが正から負に変化する位置を数値計算する。

<u>結合共振領域</u>　計算例として連行鉛直従動荷重を受ける場合、および、交互に作用する連行水平従動荷重を受ける場合の不安定領域を単純共振とともに求めた結果を示す。

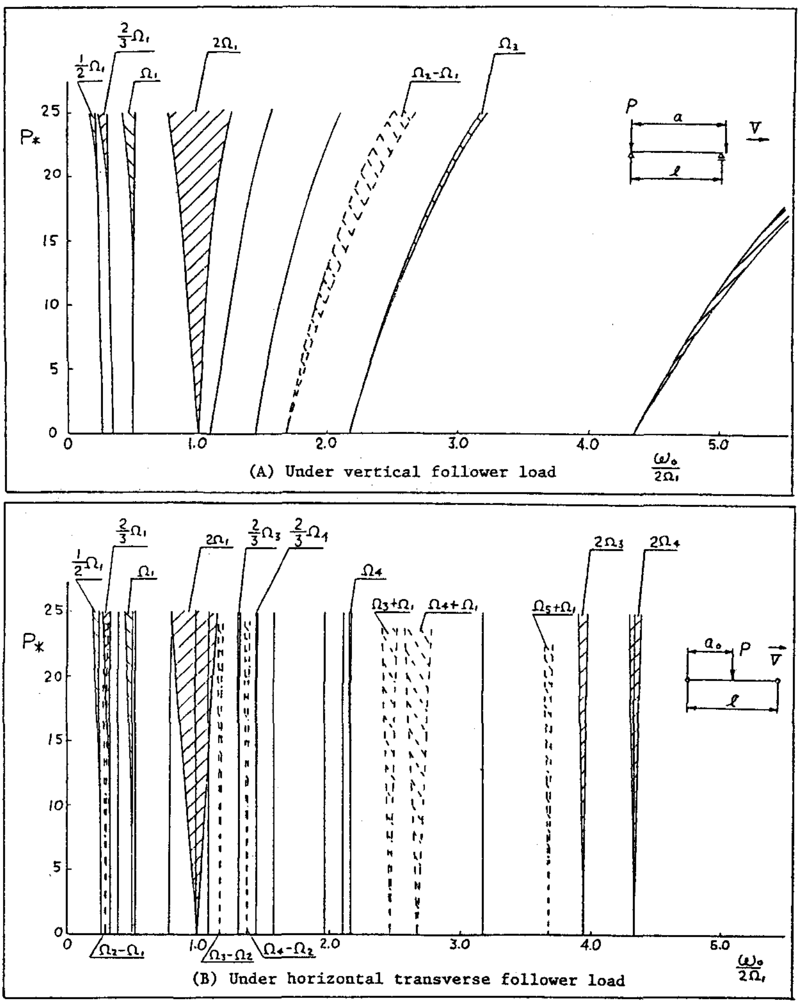

Fig. 1　Regions of parametric instability for a simply supported beam under traveling constant follower load system when $M_0=J_0=0.0$.

1) 會田：連行従動荷重を受ける梁の動的弾性安定性について、第30回応力連合講演論文集，2) 會田・福田・小松：走行従動横荷重を受ける梁の動的安定性に及ぼす荷重質量の影響について、土木学会中四国支部昭和57年度年次講演概要，3) Hahn, W：Stability of Motion, Springer Verlag, P. 300, 1967, 4) Takahashi, K：A Method of Stability Analysis for Non-linear Vibration of Beams, Sournal of Sound and Vibration (1979) Vol. 67 PP. 43～45