

1. まえがき 近年、構造解析において有限要素法が広く用いられるようになってきた。この有限要素法は、静的な解析においては、最終的に連立1次方程式を解くことに帰着されることになり、この多元連立1次方程式の解法が問題となる。しかしながら、係数行列のスパース性(行列内の要素の多くが零である性質)を利用すれば、容量的・演算時間的に非常に有効であり、このような方法として、バンド・マトリックス法とプロファイル法が代表的なものである。構造解析に用いられるモデルは形状より、1)全体的に凹凸のない構造物、2)突起をもつ構造物、の2つに大別される。1)においては、バンド・マトリックス法が、2)においては、プロファイル法が有効に利用できることが知られており¹⁾、本報告では、筆者らの1人が提案している、帯幅およびプロファイルの最小化法の改良をこころみる。

2. 帯幅最小化法 最小帯幅は、グラフの最大幅に支配されることが知られている¹⁾。よって、最小帯幅問題は、グラフの最大幅をいかに見い出すかという問題に置き換えられる。これを基本とするアルゴリズムが、白石らにより¹⁾またその改良が谷口らにより²⁾提案されている。この概略を図-1に示す。境界節点集合より等距離節点集合(レベルセット)を作り、 U_1 を見い出す。 U_1 よりレベルセットを作り、 U_2, U_3 を見出し、センターライン(L_c)を決定する。これはグラフの幅である。これに平行に、再度レベルセットを作成する。このアルゴリズムでは、レベルセットの作成が重要な位置を占めている。 L_i より L_{i+1} を作成するとき、白石らはすべての節点を使って求めた。谷口らは、要素が規則的に並んでいる場合に、三角形要素では1点おき、四角形要素では2点おきに L_i の点を探せばよいという性質を利用した。ここでは、さらに改良を加えたアルゴリズムを示す。また従来の研究では三角形要素を対象としていた。これは、四角形要素の場合、 L_i が要素を2分するためであった。そこで L_c の決定法に修正を加えて、四角形要素にも適用できるように拡張した。新しいレベルセット作成アルゴリズムでは、 $out-deg. U_\alpha$ を用いる。 $out-deg. U_\alpha$ とは、 L_{i+1} の中で U_α に隣接している節点数である。三角形要素の場合、1点おきに探す(ESVS)というのが基本となり、 $out-deg. U_\alpha = 2$ の点である。(図-2参照) $out-deg. U_\alpha = 0$ の点はESVSより除き、 $out-deg. U_\alpha = 1$ の点は U_α が L_{i+1} の最後の節点の場合、ESVSに含める。また、 $out-deg. U_\alpha \geq X$ ($X = 3$)の点は、必ずESVSに含める。これにより、効率よく L_{i+1} のすべての点を拾うことができる。四角形要素の場合は、2点おきに探す(ETVS)というのを基本として、 $X = 4$ とすれば、三角形要素と同様にすべての点を拾うことができる。ここで提案したアルゴリズムに従って実際にプログラムを作成し、これを適当な解析モデルに適用した。なお比較のためにCuthill-McKee法を用いた⁴⁾。出発点としては、最小次数の点を用いた。C-M法は最小次数の個数だけのレベルセットを作成する。そこで、その回数をCOUNTとし、演算時間をTとし

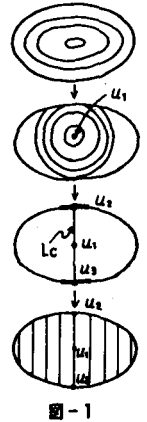


図-1

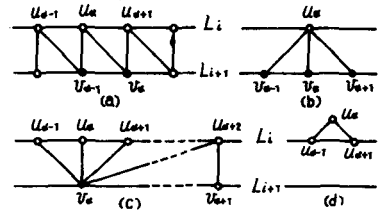


図-2

表-1

	節点数	42	99	136	193	100	169	256	324	400	484	576
Proposed Method	HBW	9	12	18	22	11	14	17	19	21	23	25
	T1/COUNT	0.012	0.026	0.037	0.056	0.037	0.062	0.118	0.157	0.186	0.228	0.273
C-M Method	HBW	11	13	18	24	19	25	31	35	39	43	47
	T1/COUNT	0.007	0.010	0.020	0.028	0.027	0.046	0.071	0.093	0.112	0.139	0.167
	COUNT	2	1	2	2	4	4	4	4	4	4	4
	T2	0.004	0.010	0.010	0.014	0.007	0.011	0.018	0.023	0.028	0.035	0.042
	T1/T2	3.00	2.60	3.70	4.00	5.29	5.64	6.56	6.83	6.64	6.51	6.50

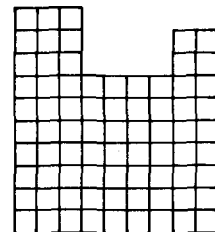


図-3

	節点数	98
Proposed Method	HBW	13
	T1	0.034
C-M Method	HBW	21
	T1	0.035
	COUNT	6
	T2	0.006
	T1/T2	5.67

て、 $T_2 = T / \text{COUNT}$ を基準として、比較を行った。結果を図-3、表1に示す。ここで T_2 と本手法の T_1 の比 T_1/T_2 をもって演算時間を比較すると、最悪の場合でも7倍程度までにおさえられる。帯幅を小さくすることによって実際の演算時間は2乗に反比例して減少するため、データの预处理としては適切であるといえる。半帯幅は本手法の結果がよく最小もしくは最小に近い値を与えている。

3. プロファイル最小化法 プロファイルを P で表わし、プロファイル中の零要素をロスと呼び L_0 で表わす。また、前進消去において、消去前零であったものが、消去後、非零化するものをフィル・イン(F)と呼び、消去前・後を通じて零のものをゼロ(Z)と呼ぶ。プロファイル最小化問題は次式で表わされる。

$$\min P \Rightarrow \min L_0 = \min (F + Z)$$

ここで、 F について考えてみると、一般時には $F \neq 0$ であり、 $\min F$ にはグラフの分割が必要となる。¹⁾次に Z について考えてみると、 $Z=0$ にするためにはグラフを分割してはならない。しかし、グラフの形状によっては、グラフの分割により L_0 を少なくしうることが知られている。¹⁾以上のことより、プロファイル最小化問題は、グラフをいくつかの部分グラフに分割し、その部分グラフにおいてはフィルイン最小化を行なえばよい。突起をもたない形状におけるプロファイル最小化法は、系の長手軸の一端を出発点として、その点より番号付けを行なう。ここで L_i の中で i に隣接している節点数を $\text{in-deg. } u_i$ で表わす。 $\text{out-deg. } u_i$ が最小の点に隣接する点のうち、 in-deg. が最大の点より番号付けを行なう。¹⁾ここで、番号付けは、 $N, N-1, N-2, \dots$ と逆順で行なう。突起をもつ形状は、分岐をもつTreeに幅をもたせたものであると考える。一方、分岐をもつTreeでは、集中点(次数が3以上の点)においてTreeを切断するという方法を用いる。³⁾従って、突起をもつ形状においては、グラフの分割が必要となる。ここで、また番号をつけられていない節点に隣接している節点をFRONTで表わす。図-4に示すような点 S より出発して、いまFRONTが $a-c-b$ となったとする。ここで C 点をBreaking Point (B.P)と呼び、これを利用して、グラフの分割を行なう。FRONTがB.Pによって、2つに分割され、グラフが、Ⅱ、Ⅲという領域に分割される。節点数を数えて、Ⅱ<Ⅲであったとすると、Ⅱ、Ⅲの順に番号付けを行なう。数値実験の結果を図-5、表2に示す。比較のために、R-C-M法⁵⁾による結果を同時に示す。本手法は、最悪の場合でも T_2 の11倍程度までにおさえられる。これは帯幅最小化法と比べて大差はないので、データの预处理として適切であるといえる。また、ロスを比較すると、本手法の結果が明らかによく、プロファイル法が用いられる突起をもつ構造物においては、ロスが半分以下におさえられているため、十分実用に供し得ると思われる。

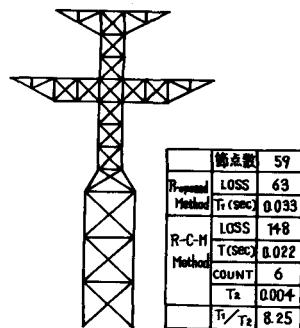
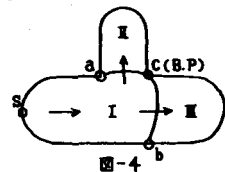


図-5

4. あとがき 帯幅最小化法においては、四角形要素への拡張を行なった。今度の課題としては、内点を含むような高次元要素にも適用できるようにすることである。プロファイル最小化法においては、突起をもつ形状に対して、グラフの分割を行なうことにより、プロファイルの最小化を行なった。結果、演算時間ともに、十分実用に供し得る範囲であった。解析モデルの形状によって、バンド・マトリックス法とプロファイル法を使い分けることによって効率的な解析が行なえる。

参考文献 1) N. Shiraiishi, et al. 2nd. Con. Numerical Methods for Eng., Vol 1 pp.

187-196, 1980 2) 谷口 恒 第15回マトリックス解析法研究発表 論文集, pp53-58

3) 今井 博行, 京都大学卒業論文, 1975 4) E.

Cuthill et al, Proc. of ACM National Conference, 1969

5) J. Alan George, Lecture Notes in Mathematics

572: Sparse Matrix Technique (1976)

表-2

	節点数	42	99	136	193	100	169	256	324	400	484	576
Proposed Method	LOSS	101	547	547	1423	660	1554	3087	4534	6423	8804	11584
	T_1 (sec)	0.026	0.058	0.071	0.119	0.057	0.098	0.155	0.225	0.285	0.338	0.422
R-C-M	LOSS	148	486	640	1868	780	1958	3935	5848	8265	11270	14927
	T_1/T_2	6.50	5.80	7.10	8.50	8.14	8.91	8.61	9.78	10.18	9.94	10.29