SQP法の構造最適化への応用

愛媛大学工学部　正　員　大久保禎二
愛媛大学大学院　学生員○松原　光宏

1. まえがき

構造設計の最適化に関して、これまでにSLP法、SUMT、勾配法等の非線形計画法に基づく方法が提案されているが、最近これらの最適化手法に大きな発展がみられる。本研究でとり上げたSQP法(Successive Quadratic Programming)も、近年その有効性が注目されている非線形計画法の一つであり、構造設計の最適化手法として高く評価されている。本研究では、SQP法の構造設計の最適化への応用に関する基礎的研究を行ない、計算例により本方法の最適性および有効性を明らかにするものである。

2. SQP法の概要

次の非線形計画問題を考える。

$$\left.\begin{aligned} &F(\mathbb{X}) \longrightarrow min. \\ &subject\ to\ C_i(\mathbb{X}) \geq 0 \quad i=1,2,----,m \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

ここに、$\mathbb{X}=[x_1, x_2, ----, x_n]^T$：設計変数，$F$：目的関数，$C_i$：制約条件

上式のSUMTの外点法における罰金関数を次のように定義する。

$$P(\mathbb{X}_k, r_k) = F(\mathbb{X}_k) + \frac{1}{r_k}\mathbb{V}(\mathbb{X}_k)^T\mathbb{V}(\mathbb{X}_k) \tag{2}$$

ここに、$\mathbb{V}(\mathbb{X}_k)$ は $\mathbb{X}_k$ で違反している制約条件を表わし、r_k は罰金項の重みを表わすパラメータである。$P(\mathbb{X}_k, r_k)$ の $\mathbb{X}_k$ における勾配は、次式より求められるが、

$$\nabla P(\mathbb{X}_k, r_k) = \mathbb{f}_k + \frac{2}{r_k}\mathbb{W}_k^T\mathbb{V}_k \tag{3}$$

$\mathbb{X}_k$ とその近傍の点 $\mathbb{X}_k+\mathbb{S}$ で同じ制約条件が違反していると仮定し、さらに点 $\mathbb{X}_k+\mathbb{S}$ が $P(\mathbb{X}, r_k)$ の最小点であるとすれば、

$$\nabla P(\mathbb{X}_k+\mathbb{S}, r_k) = \mathbb{f}_k + \frac{2}{r_k}(\mathbb{W}_k^T\mathbb{V}_k + \mathbb{W}_k^T\mathbb{W}_k\mathbb{S}) = 0 \tag{4}$$

である。ここに $\mathbb{f}_k, \mathbb{W}_k$ は、それぞれ $F_k, \mathbb{V}_k$ の1次の偏微係数である。(4)式の両辺に $\mathbb{W}_k\mathbb{B}_k^{-1}$ を乗ずると、

$$\mathbb{W}_k\mathbb{S} = -\frac{r_k}{2}\lambda_k - \mathbb{V}_k \qquad ここに、\lambda_k = (\mathbb{W}_k\mathbb{B}_k^{-1}\mathbb{W}_k^T)^{-1}\mathbb{W}_k\mathbb{B}_k^{-1}\mathbb{f}_k \tag{5}$$

を得る。$\mathbb{B}_k$ は、目的関数 F_k の2次の偏微係数である。上記の $\mathbb{V}_k$ は $\mathbb{X}_k$ および $\mathbb{X}_k+\mathbb{S}$ で違反している制約条件のみについて考慮しているが、$\mathbb{X}_k$で満足しているが $\mathbb{X}_k+\mathbb{S}$ で満足しなくなる制約条件 $\overline{\mathbb{C}}_k$ をも考慮することとすると、$\mathbb{g}_k = \begin{bmatrix}\mathbb{V}_k \\ \overline{\mathbb{C}}_k\end{bmatrix}$ として、(5)式と同様に次式が導入できる。

$$\mathbb{A}_k\mathbb{S} = -\frac{r_k}{2}\lambda_k - \mathbb{g}_k \qquad ここに、\lambda_k = (\mathbb{A}_k\mathbb{B}_k^{-1}\mathbb{A}_k^T)^{-1}\mathbb{A}_k\mathbb{B}_k^{-1}\mathbb{f}_k \tag{6}$$

また、$\mathbb{A}_k$ は $\mathbb{g}_k$ の1次の偏微係数である。

そこで、目的関数 $F(\mathbb{X})$ を $\mathbb{X}_k$ の近傍で2次形式に近似し、かつ、(6)式の制約条件を考慮すると、$\mathbb{S}$ に関する次の2次計画問題を導入することができる。

$$\left.\begin{aligned} &min. \quad \mathbb{f}_k^T\mathbb{S} + \frac{1}{2}\mathbb{S}^T\mathbb{B}_k\mathbb{S} \\ &subject\ to \quad \mathbb{A}_k\mathbb{S} = -\frac{r_k}{2}\lambda_k - \mathbb{g}_k \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

この2次計画問題の解 $\mathbb{S}_k$ は、2次計画法により次式で決定され、$\mathbb{X}_k+\mathbb{S}_k$ が $P(\mathbb{X}, r_k)$ の最小点として近似される。

$$\mathbb{S}_k = \mathbb{B}_k^{-1}\left\{\mathbb{A}_k^T(\mathbb{A}_k\mathbb{B}_k^{-1}\mathbb{A}_k^T)^{-1}(\mathbb{A}_k\mathbb{B}_k^{-1}\mathbb{f}_k - \frac{r_k}{2}\lambda_k - \mathbb{g}_k) - \mathbb{f}_k\right\} \tag{8}$$

しかし、$\mathbb{B}_k$ の不正確さや制約条件 $\mathbb{g}_k$ の線形近似(式(6))などの誤差により、(8)式より得られる $\mathbb{S}_k$ は必ずしも $\mathbb{X}_k$ を改良するとは限らない。そこで、確実に罰金関数 $P(\mathbb{X}, r_k)$ を減少させる改良点 $\mathbb{X}_{k+1}$ を $\mathbb{S}_k$ の方向に line search により $\mathbb{X}_{k+1}=\mathbb{X}_k+\alpha\mathbb{S}_k$ として求める。また上記の process において、目的関数の2次の偏微係数 $\mathbb{B}_k$ の逆行列 $\mathbb{B}_k^{-1}$ は、直接求めると計算量が多くなるので、次のようにDFP公式または、BFGS公式により求めている。

$$\mathbb{B}_{k+1}^{-1} = \mathbb{B}_k^{-1} - \frac{\mathbb{Z}_k \mathbb{Z}_k^T}{\mathbb{y}_k^T \mathbb{Z}_k} + \alpha \frac{\mathbb{S}_k \mathbb{S}_k^T}{\mathbb{S}_k^T \mathbb{y}_k} , \qquad \text{if} \quad \mathbb{S}_k^T \mathbb{y}_k < \mathbb{y}_k^T \mathbb{Z}_k \tag{9}$$

$$\mathbb{B}_{k+1}^{-1} = \mathbb{B}_k^{-1} - \frac{\mathbb{S}_k \mathbb{Z}_k^T}{\mathbb{S}_k^T \mathbb{y}_k} - \frac{\mathbb{Z}_k \mathbb{S}_k^T}{\mathbb{S}_k^T \mathbb{y}_k} + \left(\alpha + \frac{\mathbb{S}_k^T \mathbb{Z}_k}{\mathbb{S}_k^T \mathbb{y}_k}\right) \frac{\mathbb{S}_k \mathbb{S}_k^T}{\mathbb{S}_k^T \mathbb{y}_k} , \qquad \text{if} \quad \mathbb{S}_k^T \mathbb{y}_k \geq \mathbb{y}_k^T \mathbb{Z}_k \tag{10}$$

ここに、$\mathbb{y}_k = \mathbb{f}_{k+1} - \mathbb{f}_k$, $\mathbb{Z}_k = \mathbb{B}_k^{-1} \mathbb{y}_k$ である。

また、罰金項の重みγ_k は次式により求める。最適解に近づくにしたがい、γ_kは自動的に0に近づく。

$$\gamma_k = -\beta \frac{2 \mathbb{V}_k^T \mathbb{V}_k}{\mathbb{V}_k^T \mathbb{\lambda}_k} \qquad ここに、\ 0 < \beta < 1 \tag{11}$$

3. 計算例

上記のSQP法により、図-1 に示す不静定トラスの最小重量設計を行なった例を示す。SQP法では、目的関数の2次の偏微係数が必要なので目的関数は設計変数の2次以上の関数でなければならない。そこで本研究では各部材断面Aを図-2に示すような正方断面と考え、その一辺Dを設計変数とした。この問題の目的関数および制約条件は次の通りである。

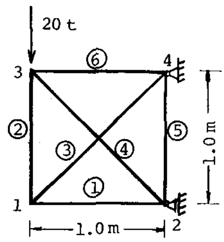

図 - 1

目的関数　$F = \rho \Sigma A_i l_i = \rho \Sigma D_i^2 l_i$,　　l_i：部材長

制約条件　$\begin{cases} g_i = \sigma_{ai} - \sigma_i \geq 0 & (i = 1, \cdots, 6) \\ g_7 = \delta_a - \delta \geq 0 \end{cases}$　　ここに、$\begin{cases} \sigma_{ta} = 1400 \ \mathrm{kg/cm^2} \\ \sigma_{ca} = 1237 \ \mathrm{kg/cm^2} \end{cases}$

$E = 2.1 \times 10^6 \ \mathrm{kg/cm^2}$, $\rho = 1 \ \mathrm{kg/cm^3}$

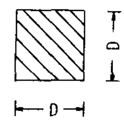

図 - 2

格点3の垂直変位をδとし、種々のδ_aにおける最適値を表-1に示す。なお、Dの初期値はすべて等しくした。

4. 考察

表 - 1

δ_a(cm)	部材No.	1	2	3	4	5	6	δ (cm)	トラス重量(kg)	反復回数
0.23	A_o (cm²)	10.0	10.0	10.0	10.0	10.0	10.0	0.23	6621.8	11
	A_{opt} (cm²)	6.41	6.41	9.47	14.02	10.35	9.82			
	σ (kg/cm²)	-1235	-1235	1182	-1218	1167	1230			
0.25	A_o (cm²)	10.0	10.0	10.0	10.0	10.0	10.0	0.25	6113.5	17
	A_{opt} (cm²)	9.52	9.52	12.00	9.40	5.97	5.87			
	σ (kg/cm²)	-1237	-1237	1388	-1237	1378	1400			
0.60	A_o (cm²)	10.0	10.0	10.0	10.0	10.0	10.0	0.25	6090.6	10
	A_{opt} (cm²)	8.19	8.19	10.23	11.29	7.05	7.05			
	σ (kg/cm²)	-1237	-1237	1400	-1237	1400	1400			

A_o：初期値 , A_{opt}：最適値

表-1の結果において、$\delta_a = 0.6$cmの場合、すべての断面は、応力制限よりその最適値が決定されているのに対し$\delta_a = 0.23$cm 及び 0.25cm の場合には、一部の部材が応力制限で、他の部材はたわみ制限より最適断面が決定されている。これらの結果は、*Dual Approach* より得られた最適解の目的関数値と等しく[3]、本研究の方法により、全域的な最適解が得られていることが明らかである。また、$\delta_a = 0.23$cm 及び 0.6cmの最適解が 10～11回の反復で得られているのに対し、$\delta_a = 0.25$cm の場合、17回の反復を要したのは $\delta_a = 0.25$cm では、反復改良過程で考慮すべき *active* な制約条件式が異なり、式(7)のg_kの内容が異なるためである。ところで $\delta_a = 0.23$cm の設計問題における *active* な制約条件が3個、$\delta_a = 0.60$cm の問題では6個であるが、いずれもほぼ等しい反復回数で最適解が得られている。これは SQP法においては、各反復改良過程における改良解を(8)式より直接決定しているためであり、最適解を決定するために必要な反復回数は、*active* な制約条件式の数にあまり影響されていないことを示しており、*Dual Approach* による場合と対照的である。ただし、$\mathbb{X}_k$が最適解から大きくはなれている場合には、(8)式より得られる$\mathbb{S}_k$ の各成分の大きさが極端に偏向することがたびたび生じ、その値をそのまま使用すると、設計変数が負となるなど、不合理なことが生ずるので、このような場合には、*Move Limit* で$\mathbb{X}$の変化量を制限する必要がある。

参考文献　1) M.C. Biggs : *Constrained minimisation using recursive equality quadratic programming* : in "Numerical methods for nonlinear optimisation". (ed. F. A. Lootsma) Academic Press (1972)　2) R. Fletcher : *A general quadratic programming algorithm* : J. Inst. Maths. Appls. 7, 76-91 (1971)　3) 大久保・谷脇 : Dual Approachによる構造物の最適設計法について : 本講演概要集