

Dual Approach による構造物の最適設計法について

愛媛大学工学部 正 員 大久保 碩二
愛媛大学大学院 学生員 〇 谷 脇 一 弘

1. まえがき

構造物の最適設計分野において、従来提案されている数値計画法を利用した方法は理論的厳密性および汎用性にすぐれているが、変数や制約条件が多くなると多量の計算時間を要することが一般的である。また、最適規準法による近似解法は、きわめて能率的であるが複数個の制約条件を考慮した場合、その理論的厳密性に問題があった。このような構造最適化の問題を解決するために、本研究ではDual Approachによる構造物の最適設計法について基礎的研究を行なう、ためである。

本研究で用いたDual Approachは構造設計における線形近似された制約条件と、目的関数を用いたラグランジュ関数を導入し、まずactiveな制約条件に関するラグランジュ乗数をニュートン法により決定し、次にこれを用いて最適な原設計変数($\bar{X}$)を決定する方法であり、一般にactiveな双対変数(λ)の数は原問題の設計変数($\bar{X}$)の数と比較して少ないため、この双対法によれば、原設計変数を直接決定する方法と比較して、変数を決定するための次元が小さい設計空間で最適解を決定することができ、能率的な最適設計法となる。

2. 理論の概要

$$\begin{array}{l} \circ \text{原問題} \left\{ \begin{array}{ll} \text{目的関数} & : W(\bar{X}) = \sum_{b=1}^B \frac{W_b}{X_b} \Rightarrow \min \\ \text{制約条件} & : \tilde{h}_g(\bar{X}) \geq 0, \quad g \in Q_R \\ \text{Side Constraints} & : X_b^{(u)} \leq X_b \leq X_b^{(v)}, \quad b=1, \dots, B \end{array} \right. \quad (1) \end{array}$$

ここで、 $\bar{X}$ は原問題の設計変数、 B は設計変数の数、 Q_R は制約条件の数である。上式の制約条件 $\tilde{h}_g(\bar{X})$ は原問題の制約条件 $h_g(\bar{X})$ のテラー展開の第1次の項を用いて線形近似されたものであり、

$$\tilde{h}_g(\bar{X}) = \bar{u}_g - u_g(\bar{X}) = \bar{u}_g - \sum_{b=1}^B C_{bg} X_b, \quad (\bar{u}_g, C_{bg} \text{は定数}) \quad (2)$$

次にこの原問題のラグランジュ関数を導入すると次式を得る。

$$L(\bar{X}) = \sum_{b=1}^B \left\{ \min_{X_b^{(u)} \leq X_b \leq X_b^{(v)}} \left[\frac{W_b}{X_b} + X_b \sum_{g \in Q_R} \lambda_g C_{bg} \right] \right\} - \sum_{g \in Q_R} \lambda_g \bar{u}_g = \sum_{b=1}^B l(X_b) - \sum_{g \in Q_R} \lambda_g \bar{u}_g, \quad \text{ただし、} l(X_b) = \left\{ \min_{X_b^{(u)} \leq X_b \leq X_b^{(v)}} \left[\frac{W_b}{X_b} + X_b \sum_{g \in Q_R} \lambda_g C_{bg} \right] \right\} \quad (3)$$

上式の $l(X_b)$ の各項は X_b のみの関数であるので、 $L(\bar{X}) = \sum_{b=1}^B l(X_b) - \sum_{g \in Q_R} \lambda_g \bar{u}_g$ の $\bar{X}$ に関する最小化は、 $l(X_b)$ をそれぞれ X_b について独立に最小化することにより達成することができる。従って $\frac{\partial l(X_b)}{\partial X_b} = 0$ より、次の X_b と λ の関係式が導入される。

$$X_b = \left[\frac{W_b}{\sum_{g \in Q_R} \lambda_g C_{bg}} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (4)$$

このようにして原問題の双対問題を次のごとく導入することができる。

$$\begin{array}{l} \circ \text{双対問題} \left\{ \begin{array}{ll} \text{目的関数} & : L(\lambda) = \sum_{b=1}^B \frac{W_b}{X_b} + \sum_{g \in Q_R} \lambda_g [u_g(\bar{X}) - \bar{u}_g] \Rightarrow \max \\ \text{制約条件} & : \lambda_g \geq 0, \quad g \in Q_R \\ X_b & = \left[\frac{W_b}{\sum_{g \in Q_R} \lambda_g C_{bg}} \right]^{\frac{1}{2}} \quad \text{if } [X_b^{(u)}]^2 < \frac{W_b}{\sum_{g \in Q_R} \lambda_g C_{bg}} < [X_b^{(v)}]^2 \\ X_b & = X_b^{(u)} \quad \text{if } \frac{W_b}{\sum_{g \in Q_R} \lambda_g C_{bg}} \leq [X_b^{(u)}]^2, \quad X_b = X_b^{(v)} \quad \text{if } \frac{W_b}{\sum_{g \in Q_R} \lambda_g C_{bg}} \geq [X_b^{(v)}]^2 \end{array} \right. \quad (5) \end{array}$$

(5) 式の $L(\bar{x})$ を最大にする $\bar{x}$ ($\bar{x}$ の最適値) は、ニュートン法を用いて次式より最小化の方向 $\vec{S}_t$ を決定し、 $\bar{x}_{t+1} = \bar{x}_t + dt \vec{S}_t$ とし $L(\bar{x})$ を最大にする $\bar{x}_{t+1}$ を求める。

$$\vec{S}_t = -[F(\bar{x}_t)]^{-1} \nabla L(\bar{x}_t) \quad (6)$$

ここに、 $F(\bar{x}_t)$ は active な制約条件式の Hessian Matrix, $\nabla L(\bar{x}_t)$ は第 1 次偏微係数であり、次式で求められる。

$$F_{gh} = -\frac{1}{2} \sum_{b \in B} \frac{C_{bg} C_{bh}}{W_b} X_b^3, \quad B = \{b | X_b^{(L)} \leq X_b \leq X_b^{(U)}\} \cdots (7), \quad \frac{\partial L}{\partial X_g}(\bar{x}) = U_g(\bar{x}) - \bar{U}_g, \quad g \in G_R \cdots (8)$$

3. 計算例および考察

上記の理論により、図-1 に示す 6 部材を有する不静定トラスの最適断面を決定した過程を表-1 に示す。

設計条件

$$\sigma_{ta} = 1400.0 \text{ Kg/cm}^2$$

$$\sigma_{ca} = 1237.0 \text{ Kg/cm}^2$$

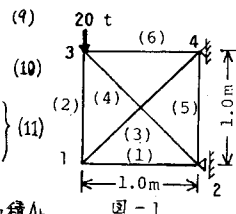
$$E = 2100000.0 \text{ Kg/cm}^2$$

$$\rho = 1.0 \text{ Kg/cm}^3$$

$$\text{断面積} : A_b = 100/X_b, \quad b=1, \dots, 6 \quad (9)$$

$$\text{目的関数} : W(\bar{x}) = \sum_{b=1}^6 \frac{L_b \times 100}{X_b} \rightarrow \min, \quad \text{ここで、} L_b \text{ は部材長} \quad (10)$$

$$\text{制約条件} \left\{ \begin{array}{l} g_i = \sigma_{ai} - \left| \frac{N_i X_i}{100} \right| \geq 0, \quad i=1, \dots, 6 \quad (\text{応力}) \\ g_7 = \sigma_{ta} - \sigma_{vmax} \geq 0 \quad (\text{たわみ}) \end{array} \right. \quad (11)$$



本法では、最適問題の目的関数として(10)式の $W(\bar{x})$ を仮定しているため、図-1 に示すトラスの断面積 A_b

を(9)式のごとく表し、 X_b を直接決定すべき設計変数とした。また、最適解を得るために必要とするトラスの解析回数を減少させるため、トラス断面の変化が 5% 以内においては C_{bg} を一定とし、くり返し使用することとした。

表-1 の計算結果およびその他の種々の計算例より次のことが明らかとなった。

- 1) 各部材断面の初期値を変えることにより得られる最適断面は異なるが、最小トラス重量はほとんど変化なく同一の値を得ている。このことより、Dual Approach によりほぼ確実に局所的な最適解が得られることが明らかとなった。
- 2) Dual Approach では、まず各制約条件の重み、すなわち、ラグランジュ乗数 λ を決定し、次にこの λ の関数として原設計変数 $\bar{x}$ を計算する。この場合、 $\bar{x}$ あるいは $\bar{x}$ の改良の過程で $g_i > 0$ に対する λ は漸次 0 となり、最適解の近傍においては、 $g_i \leq 0$ の制約条件に関する λ のみが active ($\lambda > 0$) となり、より次元の小さな双対空間を形成し、よりたやすく最適解を決定することができる。このことは、本法の大きな長所の一つである。
- 3) たわみ制限が 0.23cm および 0.22cm の場合、最適解がたわみ制限のみにより決定されているにもかかわらず、反復回数が 10 回前後を要しているのは、 $\bar{x}$ の改良の過程で、応力の制約条件に対する λ が 0 となる回数がある程度必要となるためである。応力で決定される場合は、許容応力より決定される $X_b^{(U)}$ が有効に働いて非常に少ない回数で最適解を得ている。しかし、たわみ制限が 0.24cm の場合のように応力およびたわみ制限がともに active となる場合は、改良過程で各部材の active な制約条件式が変化し、これにより改良方向 $\vec{S}_t$ が変化し、 $\bar{x}$ が一定値に収束するために必要とする反復回数が増加するので、大規模な構造設計に適用した場合、このことについての検討が必要である。
- 4) 制約条件を設計変数について線形近似したことにより、 F_{gh}

表-1 (図-1 に示すトラスの種々のたわみ制限における λ の初期値および最適値)

および $\frac{\partial L}{\partial X_g}$ を、それぞれ(7)および(8)式から簡単に計算できるとも、本法の大きな長所となる。5) (5)式において、 $\sum_{g \in G_R} \lambda_{bg} C_{bg}$ が負となる X_b についてはその許容応力度より決定される $X_b^{(U)}$ を使用することにより、スムーズに最適解を得ることができた。

	たわみ制限, cm	0.27cm				0.24cm				0.23cm				0.22cm			
		$\lambda_{\sigma 1}$	$\lambda_{\sigma 2}$	$\lambda_{\sigma 3}$	$\lambda_{\sigma 4}$	$\lambda_{\sigma 5}$	$\lambda_{\sigma 6}$	$\lambda_{\sigma max}$	λ_{gmax}	$\lambda_{\sigma 1}$	$\lambda_{\sigma 2}$	$\lambda_{\sigma 3}$	$\lambda_{\sigma 4}$	$\lambda_{\sigma 5}$	$\lambda_{\sigma 6}$	$\lambda_{\sigma max}$	λ_{gmax}
初期値	(1)	0.80	1.25	0.30	0.90	3.84	2.31	0.50		0.80	1.25	0.30	0.90	3.84	2.31	0.50	
最適値	(2)	0.80	0.01	0.30	0.90	3.84	2.31	0.50		0.80	0.01	0.30	0.90	3.84	2.31	0.50	
最適解	A_1 (cm ²)	7.21	0.31	8.08	0.001	6.74	0.0	8.08	0.0	6.95	0.0	8.27	0.0	7.00	0.0	8.64	0.0
	A_2 (cm ²)	7.21	0.0	8.08	0.001	6.74	0.0	8.08	0.0	6.95	0.0	8.27	0.0	7.00	0.0	8.64	0.0
	A_3 (cm ²)	9.00	0.69	10.10	0.001	9.17	0.0	11.08	0.0	9.84	0.0	11.70	0.0	9.90	0.0	12.23	0.0
	A_4 (cm ²)	12.67	0.0	11.43	0.001	13.33	0.0	11.43	0.06	13.55	0.0	11.70	0.0	14.60	0.0	12.23	0.0
	A_5 (cm ²)	7.92	0.14	7.14	0.001	9.06	0.0	7.71	0.0	9.58	0.0	8.26	0.0	10.31	0.0	8.64	0.0
改良反復回数	A_6 (cm ²)	7.92	0.36	7.14	0.001	9.06	0.0	7.71	0.0	9.58	0.0	8.26	0.0	10.31	0.0	8.64	0.0
	λ_{gmax}	0.0	0.0	0.0	0.0	25.58	25.64	28.94	28.94	28.94	28.94	31.72	31.63	31.72	31.63	31.72	31.63
トラス解析回数		6	3	6	3	6	3	6	3	6	3	6	3	6	3	6	3
最小トラス重量(kg)		6090.8	6090.8	6342.7	6342.5	6613.8	6614.0	6923.9	6914.9	6613.8	6614.0	6923.9	6914.9	6613.8	6614.0	6923.9	6914.9
active な制約条件		01, 02, 03, 04, 05, 06				01, 02, 06				06				06			

参考文献 Claude Fleury and Lucien A. Schmit, Jr.: Dual Methods and Approximation Concepts in Structural Synthesis: NASA Report 3226, Dec. 1980