都市高速道路の最適規模——ある需要曲線と平均費用曲線との接点の性質——

岡山大学　正員　明神 証
〃　〃　○浅井 加寿彦

1. まえがき

都市高速道路の最適規模の導出方法として，収支均等という制度のもとで消費者余剰最大を最適化規準とする山田のモデル[1)]がある。これによれば，最適解は需要曲線と平均費用曲線との接点に存在し，理論的に誘導された特定の需要曲線を用いたとき次のような性質をもつという結論を得ている。

「料金」＝「限界転換交通量１台当りの規模限界費用」
　　＝「高速道路を平均トリップ長だけ走行する場合に得られる短縮時間の価値」

新たに定義した収支均等条件をみたす転換率を用いて最適解の所在を吟味した結果，必ずしも需要曲線と平均費用曲線との接点に存在しないことが判明した。しかしながら，この接点は種々の性質をもち，あるケースにおいては接点に解が存在する場合がある。そこで，本文は山田のもちいた特定の需要曲線と平均費用曲線との接点における性質について再考するものである。

2. モデルと定式化[1)]

次の関数を導入する。

・転換対象交通量……$X = X(s),\ X'(s) > 0$　(1)
・総費用関数……$C = C(s),\ C'(s) > 0$　(2)
・需要曲線……$P = f(q, s)$　(3)

ただし，規模 s は高速道路の総延長でもって定義する。また，q は規模 s・料金 P のときの高速道路への転換交通量である。

料金として次の平均費用を課す。

$$\pi = C(s)/q \quad (4)$$

式(3)，(4)によって表わされる曲線を模式的に示したものが図-1であり，規模 s に相対応する２つの曲線の交点もしくは接点が収支均等条件を満たす均衡点である。問題はこの均衡点において消費者余剰の最大点を求めることにある。すなわち，収支均等条件

$$f(q, s)\cdot q = C(s) \quad (5)$$

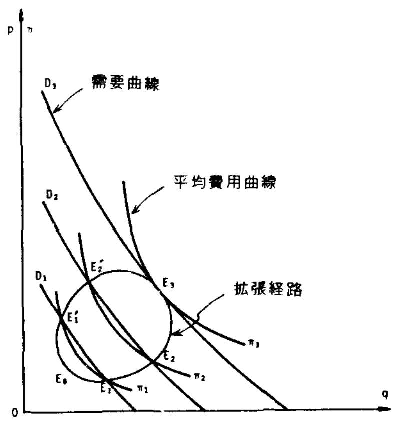


図-1. 需要曲線と平均費用曲線

のもとに，次の消費者余剰を最大にする (q, s) を求める。

$$S = \int_0^q f(\xi, s)\, d\xi - C(s) \quad (6)$$

これは，ラグランジュの未定乗数法によって解くことができる。すなわち，

$$\mathcal{L} = \int_0^q f(\xi, s)\, d\xi - C(s) + \mu\{C(s) - f(q, s)\, q\} \quad ,\ \mu: ラグランジュの未定乗数. \quad (7)$$

$$\partial\mathcal{L}/\partial q = 0\ ,\ \partial\mathcal{L}/\partial s = 0\ ,\ \partial\mathcal{L}/\partial \mu = 0 \quad (8)$$

3. 需要曲線と平均費用曲線との接点の性質

3-1. 接点におけるラグランジュの未定乗数 μ について

式(8)の第1式を求めると、

$\partial \mathcal{L}/\partial q = f(q,s) - \mu\ \partial R/\partial q = 0$　，ただし　$R = f(q,s)\,q$

ところで，平均費用曲線が式(4)のような直角双曲線の場合，需要曲線との接点は周知のように料金収入Rの最大点であるから，任意のsに対して $\partial R/\partial q = 0$ である。接点において $f(q,s)$ は有限確定値をとるので，μは一意に定まらないことになる。

式(8)の第2式は，

$\partial \mathcal{L}/\partial s = \int_0^q \partial f/\partial s \cdot d\xi - C'(s) + \mu\{C'(s) - \partial R/\partial s\} = 0$

ところで，式(9)より接点においてμは一意に定まらないことが判明したが（$\mu = \pm\infty$），$\int_0^q \partial f/\partial s \cdot d\xi - C'(s)$ が有限の確定値をとるとすれば，接点において式(10)が成立するには次式が必要である。

$C'(s) - \partial R/\partial s = 0$

3−2．特定の需要曲線による接点の性質

山田等によって提案された次の需要曲線[2]をもちいる。

$P = f(q,s) = \{\ln AX(s) - \ln q\}/\alpha$　，ただし　A，α は定数

これを用いると，式(11)は次のようになり，これはすでに山田によって指摘された重要な性質である。

$C'(s)/(X'(s)\cdot q/X(s)) = 1/\alpha$

同じく式(14)を用いて式(10)を求めると，

$\partial R/\partial q = P - 1/\alpha = 0$

となり，接点は常に $P = 1/\alpha$ 上の1点であることを示している。

3−3　接点が消費者余剰最大となる特殊な場合

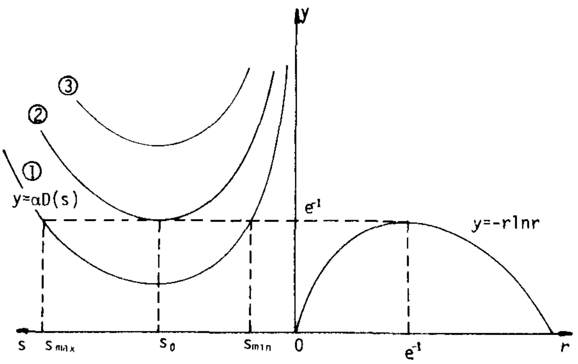
ここで，次のような転換率を新たに定義する。

$r = q/(AX(s))$

このとき収支均等条件(5)は次のように表わされる。

$-r\ln r = \alpha D(s)$　，$D(s) = C(s)/(AX(s))$

今，$y = \alpha D(s)$ を下に凸な曲線と考えた場合の上式の関係を図−2に示した。$-r\ln r \leqq e^{-1}$ であるから，規模 s_0 のところで $\alpha D(s)$ が最小値をとるとすると，収支均等条件(18)が成立するためには $\alpha D(s_0) \leqq e^{-1}$ でなければならない。ゆえに，曲線①の場合には $s_{min} \leqq s \leqq s_{max}$ の範囲において収支均等条件を満たすが，



図−2

曲線③の場合は存在しない。曲線②の場合は $s = s_0$ のみにおいて収支均等条件を満たし，いうまでもなく解が存在するのはこの1点である。このときの料金と転換交通量は次のようになる。

$P = 1/\alpha$　，$q = AX(s_0)\,e^{-1}$

ところで，P〜q平面に収支均等な経路を描くと，曲線①の場合が図−1のケースであり，曲線②は図−1の閉曲線が収縮し1点になったケースである。

以上は $\alpha D(s)$ が下に凸な曲線をとる場合を考えたが，その他のいろいろな $\alpha D(s)$ の形状においてもその最小値が $\alpha D(s) = e^{-1}$ であれば，そこには需要曲線と平均費用曲線との接点であり消費者余剰最大となる点である。ただし，$\alpha D(s) = e^{-1}$ を満たす点が2点以上であれば，規模の大きい方が消費者余剰最大となる点である。

〈参考文献〉

1). 山田浩之；都市高速道路の最適規模と料金水準，高速道路と自動車，Vol.XI，No.9，P.19〜22，1968−9.

2). 上掲1)の他，佐々木綱；阪神高速道路における均一料金圏の決定，高速道路と自動車，Vol.XI，No.2，P.19〜29，1968−2.