浸透場における境界要素法の2.3の適用例

徳島大学工学部　正　山上拓男
徳島市役所　正○上村秀明

1. まえがき：近年、FEMと並んで数値解析手法としての境界要素法（BEM）が多くの場で活用されるに至っている。ことに、参考文献1)、2)、あるいは1)の訳本としての3)が出版され、系統だった解説と具体的なプログラム例が紹介されたため、この方法は一層身近なものとなり、実構造物の設計に積極的に取り入れられることが予想される。

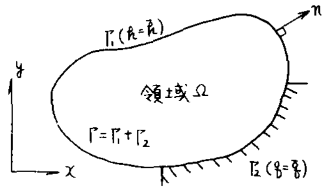
BEMはその名が示す通り、ある物理現象を支配する微分方程式を、領域の境界上のみで成り立つ関係式に変換し、この関係式をFEMと類同な概念で離散化するものである。その結果、境界上の未知量に関する多元連立方程式を解くことになり、FEMと違って直接的には境界上のみの解を求めることになる。無論、境界上の解が定まれば、それを基に、領域内部の諸量を計算することは容易である。

本報告は、Brebbiaによるプログラム[1)3)]を応用して、浸透解析にこの方法を導入する際の注意点、特に、非定常自由水面問題を解析する場合、問題となることが予想される事項を取り上げ、その難点を解消する方策を検討したものである。

2. 基本概念の要約：簡単のためここでは均質・等方な浸透場を対象とする。すると、流れの支配微分方程式はhを全水頭として

$$\nabla^2 h = 0 \tag{1}$$

である。いま、図−1にみられるように、基本境界条件$h=\bar{h}$が与えられる境界をΓ_1、また自然境界条件$\partial h/\partial n = \bar{q}$が与えられる境界を$\Gamma_2$とし、さらに、式(1)に対する基本解（2次元）



図−1　記号の定義

$$h^* = \frac{1}{2\pi}\ln\left(\frac{1}{r}\right) \tag{2}$$

を導入する。このとき、$q=\partial h/\partial n$，　$q^*=\partial h^*/\partial n$　として、次式が導かれる．

$$C^i h^i + \int_\Gamma h q^* d\Gamma = \int_\Gamma q h^* d\Gamma \tag{3}$$

ここに、h^i=任意点（i点）の全水頭，C^i= 定数　境界がなめらかなとき$C^i=1/2$となる．

式(3)に境界要素を持ち込み、離散化すれば、n個の要素に対して次式を得る。

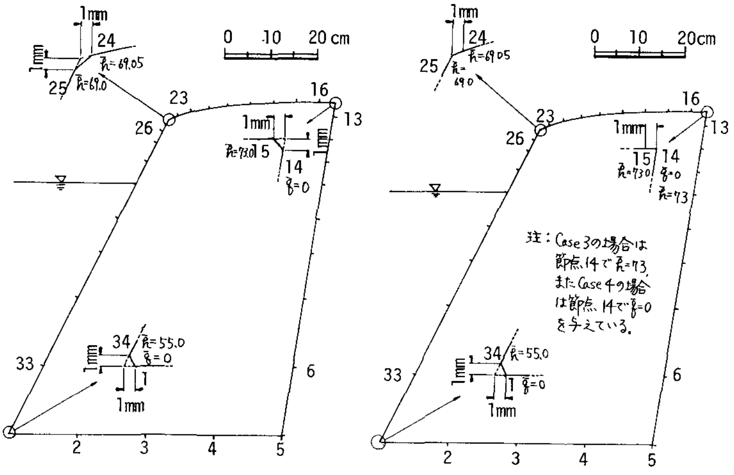
$$C^i h^i + \sum_{j=1}^{n}\int_{\Gamma_j} h q^* d\Gamma = \sum_{j=1}^{n}\int_{\Gamma_j} q h^* d\Gamma \tag{4}$$

この式をさらに変形していくと、FEMと同様、最終的に次式で表される多元連立方程式に到達する．

$$[A]\{X\}=\{F\} \tag{5}$$

式(5)において、係数行列[A]は、FEMにおける浸透性行列とは違って、対称とはならず、バンド性ももたず、またスパースな行列でもない。しかし、境界上の未知量だけが対象となるため、FEMに比べ解くべき方程式の数が格段に少なくてよい。未知ベクトル$\{X\}$の要素は、境界Γ_2上では全水頭、また境界Γ_1上では境界の外向き法線方向の動水勾配よりなりたっている。右辺の$\{F\}$はΓ_1，Γ_2上で与えられた境界条件より定まる既知ベクトルである．

3．非定常自由水面解析の予備的検討：外水位変動時の自由水面位置を精度よく決定することが要請される問題は少なくない．この場合，自由水面上の流速が重要な役割を果たす。したがって、BEMをこのような非定常自由水面問題に導入しようとすれば、なによりも自由水面を構成する境界上で精度の高い流速が求められなければならない。ところがBEMでは角(corner)のある部分で式(5)を解いて得られる(自由水面に垂直な方向の)動水勾配つまり流速は非常に精度が悪くなる。それは角の部分で法線方向が唯一に定まらないからである。いまの場合、角の部分とは浸出点とか、自由水面と不透水面(例えば粘土コアなど)との交点などである。そこで、一次要素の利用を前提として、こうした自由水面上の角の部分の流速を簡便かつ高精度で評価する方策をさぐるべく、Brebbiaの示唆に従い、図2に示すモデルのもとに2、3の検討を試みた。ここに、Brebbiaの示唆とは角の部分で極めて接近した2節点を設け、適切な境界条件を与えると解の悪化を防ぐことができるとするものである。



(a) Case 2　　(b) Case 3 および Case4

図-2 非定常自由水面解析の1次要素による要素分割のモデル

紙面の都合上、詳しい説明は講演当日にゆずらざるをえないが、図-2(a),(b)は自由水面の両端でおのおの図中の拡大図に示すような要素分割を行い、これらの節点でやはり図中に示す境界条件を与えたものである。(a),(b)の相違点は後者が上述した2節点をいずれも自由水面上に設けているところにある。

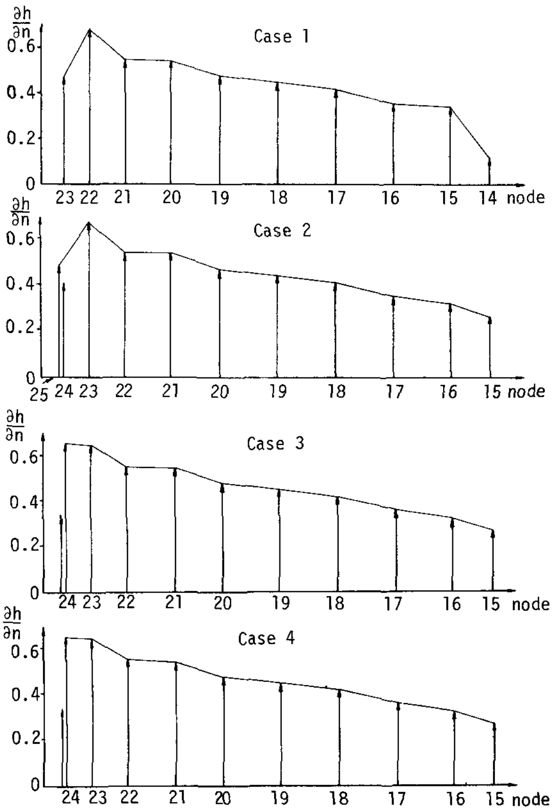


図-3 自由水面に沿う法線方向の動水勾配の分布

図-3はこうした条件のもとに得られた自由水面上の各節点における法線方向の動水勾配を、自由水面に沿う節点の位置に対してプロットしたものである。ただし、Case1は自由水面の両端で図-2に示すような特別な2節点は設けず、単一の節点を有する場合の解を併記したものである．これらの結果から、動水勾配がなめらかな分布をみせているCase3 or Case4の要素分割が非定常問題には最適であると結論できよう。

[参考文献] 1) Brebbia, C.A.: The Boundary Element Method for engineers, Pentech Press, 1978. 2) Brebbia, C.A. & S. Walker: Boundary element techniques in engineering, Newnes-Butterworths, 1980　3) 神谷・田中・田中共訳：境界要素法入門、培風館, 1980.