

# 複数本の円柱による波の変形について

福山大学工学部 正員 ○ 梅田 真三郎  
神户大学工学部 正員 眞 源 亮

## 1. まえがき

近年、海洋開発に伴って複数の大規模な人工島や構造物が海上に建設されるようになった。このような構造物による波の変形の計算方法に関しては、種々の解法があるが、境界面を円柱面と看做微分方程式の解を円柱関数で表わす場合があり、その計算においては、波の波長と円柱径の比較などから近似的に数値計算されている。

本研究では、複数本の円柱による波の変形に関して円柱径の増大による円柱関数を用いた場合の厳密解と近似解との差および円柱の相互干渉などについて考察した。

## 2. 理論式

図-1 のような2本の

円柱に、x軸の正方向に進行する波  $a e^{i k x}$  が入射するとき、入射波の速度ポテンシャル重と反射波の速度ポテンシャル重は、線型の水底条件および底面条件を満足する形で表わされ、さらに重に含まれる関数  $\phi(x, y)$  は、連続の条件と円柱  $\Gamma_1, \Gamma_2$  上での境界条件より決定される。

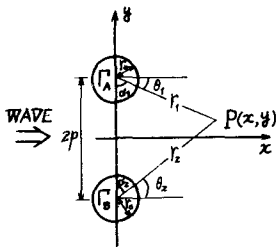


図-1 座標系(2本の円柱の場合)

今、入射進行波  $e^{i k x}$  を円柱  $\Gamma_1, \Gamma_2$  に対して図-1に示すような座標を考へ、各々を  $\phi_0^A, \phi_0^B$  とすれば、

$$\phi_0^A = \sum_{n=-\infty}^{\infty} i^n J_n(R_1) e^{i n \theta_1} \quad (1)$$

$$\phi_0^B = \sum_{n=-\infty}^{\infty} i^n J_n(R_2) e^{i n \theta_2} \quad (2)$$

とする。こゝに  $J_n(R)$  は、 $n$  次の Bessel 関数で、 $R_1 = k r_1, R_2 = k r_2$  で、また  $R_0 = k r_0, R_p = 2 k p$  とする。 $r_0, r_1, r_2$  は波数である。この  $\phi_0^A$  が円柱  $\Gamma_1$  に入射し

たときの反射波を  $\phi_1^A, \phi_1^B$  が円柱  $\Gamma_1$  に入射したときの反射波を  $\phi_2^B$  とし、それぞれの場合の速度ポテンシャル  $\phi_1, \phi_2$  を次のように考える。

$$\begin{aligned} \phi_1 &= \phi_0^A + \phi_1^A \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} i^n J_n(R_1) e^{i n \theta_1} + \sum_{n=-\infty}^{\infty} d_n H_n^{(2)}(R_1) e^{i n \theta_1} \quad (3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \phi_2 &= \phi_0^B + \phi_1^B \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} i^n J_n(R_2) e^{i n \theta_2} + \sum_{n=-\infty}^{\infty} d_n H_n^{(2)}(R_2) e^{i n \theta_2} \quad (4) \end{aligned}$$

こゝに  $H_n^{(2)}(R)$  は、 $n$  次の第2種 Hankel 関数で、以下においては(2)を省略する。次に  $\phi_1^B$  が円柱  $\Gamma_2$  に入射したときの反射波を  $\phi_2^B$  とし、以下順次それぞれの場合の内柱への入射、反射を同様に考えると、一般に次のように表わされる。

$$\phi_j = \phi_k^B + \phi_{k+1}^A \quad (j=1, 3, 5, \dots) \quad (5)$$

$$\phi_{j+1} = \phi_k^A + \phi_{k+1}^B \quad (k = \frac{j-1}{2}) \quad (6)$$

ここで、それぞれ速度ポテンシャル  $\phi_j, \phi_{j+1}$  に対して境界条件  $[\partial \phi_j / \partial R_1]_{R_1=R_0} = 0, [\partial \phi_{j+1} / \partial R_2]_{R_2=R_0} = 0$  をそれぞれに適用すれば、反射波の係数  $d_n$  が求まり、各々の速度ポテンシャル  $\phi_j$  の和として  $\phi$  を求めることができる。

しかし、速度ポテンシャル  $\phi_0$  と  $\phi_n$  に関しては、それぞれ入射、反射波の項に両円柱と関係する変数が表われる。このような場合には、円柱関数の加法定理や近似式の適用などが考えられるが、今回は次のような検討を行ない、各速度ポテンシャル  $\phi_j$  の級数が収束するまでの厳密解と近似解を求めた。

速度ポテンシャル  $\phi_0$  と  $\phi_n$  の入射波の項に関しては、それぞれ  $\Gamma_1$  と  $\Gamma_2$  から距離  $R$  と角度  $\theta$  との関数で表わされているので、その  $R$  と  $\theta$  を変数と考えた場合、近似的に  $R$  の変化の影響に対して  $\theta$  の変化の影響が小さいと考へて  $\theta$  を定数とした場合とで円柱径の増大によって求める速度ポテンシャルがどの程度変化するかを

検討してみた。検討式の一例として  $\psi_3$  の場合を示す。

$$\psi_3 = \psi_1^B + \psi_2^A$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-i)^n \frac{J_n(R_0)}{H_n(R_0)} H_n(R_2) e^{in\theta_2} + \sum_{n=-\infty}^{\infty} d_n H_n(R_2) e^{in\theta_1} \quad (7)$$

$$\frac{\psi_3}{R_1} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[ (-i)^n \frac{J_n(R_0)}{H_n(R_0)} \frac{1}{R_1} \{ H_n(R_2) e^{in\theta_2} \} + d_n H_n(R_2) e^{in\theta_1} \right] \quad (8)$$

この場合、 $R_1, \theta_1$  が独立変数と考え、 $R_2, \theta_2$  がそれぞれ  $R_1$  と  $\theta_1$  の関数として微分を行ない、境界条件  $[\psi_3 / R_1]_{R_1=R_0} = 0$  から  $d_n$  を求めると次のようになる。

$$d_n = \beta_{1n} \cdot i^n \frac{J_n(R_0)}{H_n(R_0)} \frac{H_n(R_2)}{H_n(R_0)} \frac{R_0 - R_p \cos \alpha_1}{R_2} e^{in\theta_2} e^{-in\theta_1} \quad (9)$$

ここに、

$$\beta_{1n} = 1 - \left( \frac{R_3}{R_0 - R_p \cos \alpha_1} \right)^2 + in \frac{H_n(R_3)}{H_n'(R_3)} \left\{ \frac{R_0 - R_p \cos \alpha_1}{R_3 R_p \sin \alpha_1} - \frac{R_3}{R_p (R_0 - R_p \cos \alpha_1) \sin \alpha_1} \right\} \quad (10)$$

$$\theta_2 = \frac{\pi}{2} - \alpha_2' \quad (11) \quad \sin \alpha_2' = \frac{R_0}{R_3} \sin \alpha_1 \quad (12)$$

このようにして  $\psi_3$  も  $\psi_4$  も求めると、それぞれは円柱からの距離  $R$  と角度  $\theta$  などの関数に、円柱径  $R_0$ 、円柱間隔  $R_p$  および角度  $\alpha$  などの関数で表わされる係数を乗じた形となる。もし  $\theta$  を定数と考えた場合には、それぞれ係数が 1 に相当するものとなる。前者の場合の求める中の絶対値を回折係数  $D_k$  とし、後者の場合のそれを  $D$  とし、種々の円柱径と円柱間隔に対して回折係数の変化を調べた。なお、これらの計算では速度ポテンシャル  $\psi_j$  は、 $\psi_6$  まで求めた。

### 3. 計算結果も考察

⑩式で表わされる係数からわかるように、回折係数  $D_k$  の算定においては不連続点が存在する。2本の円柱の場合、たとえば円柱間隔  $2p = 2.0L$  ( $L$ : 波長) の場合には、円柱径  $R_0$  が  $L/6$  程度までの小さなものに対しては、回折係数  $D_k$  と  $D$  との差はほとんどないが、円柱径がそれ以上になってくるとその差が大きくなる場所がある。その一例として  $R_0 = L/3$  の場合の円柱背後における  $D_k$  と  $D$  との差の分布状況を図-2 に示す。不連続点に近づくにつれてその差が大きくなっていくようである。

次に  $\theta$  を定数と考えて導出した回折係数  $D$  に円柱か

らの距離の比を乗じたものであって円柱による相互干渉の程度をみてみると、円柱半径  $R_0 = L/3$  に対しては図-3 のような結果となった。 $R/L = 0.0$  と  $0.5$ 、 $R/L = 1.5$  と  $2.0$  の差を比べ、多少値の差が大きいところもあるが、比較적으로似た変化を示している。またこの円柱径の場合には、 $R/L = 1.5$  付近までが両円柱からの影響を強く受けており、それ以後は漸次減少していくようである。

なお、3本の円柱に対しても、⑤と⑩式にもう一つの円柱による項をおよび式を加えて2本と同様の考え方で検討することができる。

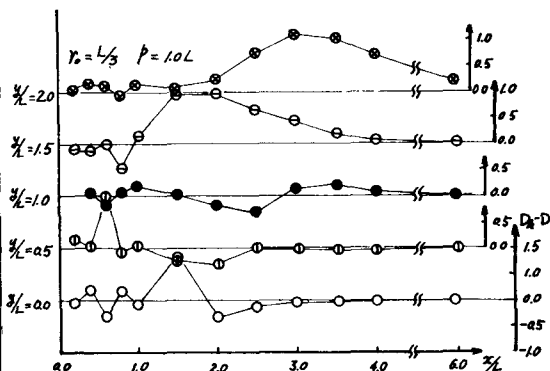


図-2 回折係数  $D_k$  と  $D$  との差の分布

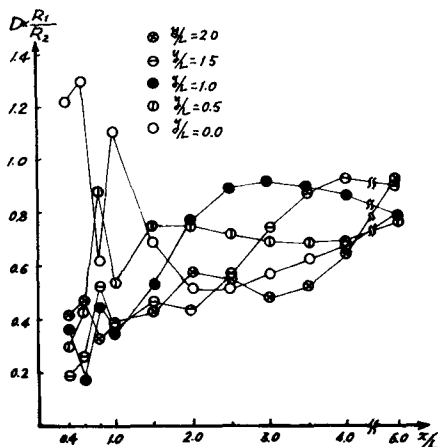


図-3 2本の円柱による相互干渉  
＜参考文献＞

大楠 丹：複数本の鉛直円柱に働く波力について、  
日本造船学会論文集，第131号