

差分法による河床変動計算

鳥取大学 工学部 正員 道上正規
鳥取大学 工学部 正員 鈴木幸一
大成建設(株) 正員 〇津中重彦

1. はじめに 近年の電子計算機の驚異的な発達により、水理学の問題を数値解析によって解くということが活発に行なわれるようになってきた。一般に、水理現象を表わす水理学的な基礎式は、多くの場合、偏微分方程式であるが、それに基づいて各種の境界条件のもとでの数値解析が実施され、水理学的な諸現象の再現と予測が試みられるようになってきたが、ここで扱う河床変動計算の場合には、計算を進める方向(上流側へか下流側へか)あるいは計算上の安定条件などが理論的に明らかにされていないため、経験的にそれらを決めている状態である。そこで、ここでは河床変動を差分法によって数値計算する場合、考慮しなければならない諸点および問題点とくに計算を進める方向あるいは安定条件を論じ、それを島根県東部に位置する斐伊川の河道形状および河床高データを用いて検討した。

2. 特性曲線と安定条件 de Vries¹⁾は、一樣砂の河床に加えられた擾乱の伝播速度 C_3 を、水面に加えられた擾乱の伝播速度 C_1 に比してずっと大きい、すなわち流れは擬定常状態に保たれているとして、特性曲線法によって求めた。すなわち、

$$\left(\frac{dx}{dt}\right) = C_3 = -\frac{\alpha}{\rho} g \frac{\partial \delta_B}{\partial u} = \frac{1}{1-\lambda} \cdot \frac{1}{1-Fr^2} \cdot \frac{1}{\lambda} \cdot \frac{\partial \delta_B}{\partial u} \cdot u \quad (1)$$

である。ここに、 $\alpha = V/(1-\lambda)$, $\beta = U/(1-Fr^2)$, $Fr = U/\sqrt{gA}$, U は平均流速, g は重力加速度, λ は水渠 δ_B は流砂量である。そして、(1)式の掃流砂量 δ_B に対して、芦田・道上の掃流砂量式を用いると、

$$C_3 = \frac{1}{1-\lambda} \cdot \frac{1}{1-Fr^2} \cdot \frac{1}{\lambda} \cdot \frac{2\alpha g}{\lambda g d A_1^3} \left[(3U^2 - \frac{2U_{cr}}{A_2} U - \frac{U_{cr}^2}{A_2^3}) + \frac{6\alpha A_2^2}{\lambda g d A_1} \cdot U (U^3 - \frac{U_{cr}}{A_2} U^2 + \frac{U_{cr}^3}{A_2^3}) \left(1 + \frac{2A_2^2}{\lambda g d} U^2 \right)^{-1} \right] \cdot U \quad (2)$$

となり、ここに、

$$A_1 = 5.75 \ln \{ 11.25 R / (1 + \frac{2A_2^2}{\lambda g d} U^2) \}$$

$$A_2 = g^{1/2} \cdot n \cdot R^{-1/6}$$

である。したがって、(2)式より、 $Fr < 1$ の場合、つまり常流であるとき $C_3 > 0$ となり、C.F.L.条件より Δt , Δx および C_3 が図-1の更線のような関係にあるとき安定である。また、 $Fr > 1$ の場合、つまり射流であるとき $C_3 < 0$ となり、C.F.L.条件より Δt , Δx および C_3 が図-1の破線のような関係を満たすとき安定となる。すなわち、安定条件は、

$$0 < \frac{\Delta t}{\Delta x} \leq \left| \frac{1}{C_3} \right| \quad (3)$$

である。

3. 差分近似の安定 河床変動計算は、水面形計算と流砂の連続式

$$\frac{\partial z}{\partial t} + \frac{1}{1-\lambda} \frac{\partial \delta_B}{\partial x} = 0 \quad (4)$$

の2つの計算をしなければならない。水面形計算は、井田の方法によって行なうが、(4)式の差分化において差分近似法の安定については、図-1より、常流であれば空間的差分については後退差分で、射流であれば前進差分を用いて近似しなければならないことがわかる。そこで、常流の場合を空間的に

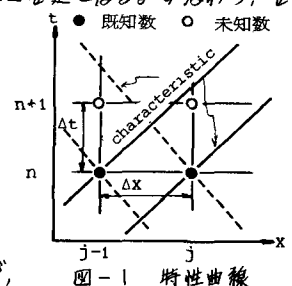


図-1 特性曲線

2 前進差分と後退差分を用いて比較したものの例が図-2 である。この図より、後退差分の方は発散していないが、反面、前進差分で計算した方では、明らかに発散し不安定な状態になっていることがわかる。よって、このことは、上述した理論結果をうまく説明しており、上述の理論結果は正しいといえる。しかし、限界値が $\tau = 1$ というのは、土砂水理学、とくに定常解析による河床変形理論の知見からは必ずしも妥当ではないので今後の問題である。

4. 計算時間ステップ 斐伊川の河道を対象にし、計算時間ステップ Δt を安定条件式との関係で決定するため、流量 Q を 50, 100, 500, 1000 および 4000 m^3/s とそれぞれ一定の流量を想定して河床変動の計算を行なって、計算の安定、不安定と理論結果との関係を調べた。その結果、4000 m^3/s を除く流量においては、2. で述べた安定条件を満足していた。図-3 は流量が 1000 m^3/s の場合の河床変動量を表わしたものであるが、この図より、計算時間ステップ Δt が 2 時間と 6 時間のとき、それぞれの計算値はほぼ一致している。しかし、反面、 $\Delta t = 24$ 時間のとき安定条件を満足しているものの計算値が変動しているのは、1 回の計算時間ステップにおける河床変動量があまりにも大きいためであると考えられる。よって、計算時間ステップ $\Delta t = 2 \sim 6$ 時間として計算をすればよいことがわかる。また、図-4 は流量が 4000 m^3/s の場合であるが、この場合、場所によっては 2. で述べた安定条件を満たしておらず、かなり計算値が変動している。よって、本研究ではこの流量の場合、はっきりした Δt を決定することができなかった。要するに、このような大きな流量が流れる場合、現象が複雑になるのであろう。さらに、流量を変えた他の同様の図より、流量が 1000 m^3/s 以下であれば $\Delta t = 24$ 時間、100 ~ 500 m^3/s であれば $\Delta t = 6$ 時間として計算を進めればよいことが得られている。

5. 日流量時系列を用いた斐伊川の河床変動の計算 実際に斐伊川の 1 年間の (昭和 50 年度) の日流量時系列を用いて計算したところ、図-5 のようになった。この間の日流量は、100 ~ 500 m^3/s の範囲にあったのは 21 日、500 ~ 1000 m^3/s の範囲にあったのは 1 日あり、1000 m^3/s 以上の流量はなく、平均流量は 400 m^3/s 程度であった。この図より、以上述べたことをうまく説明していると考えられる。それぞれの計算値の間にわずかに変動量が見られるが、それは 1000 m^3/s 以上の流量の影響によるものと思われる。

6. おわりに 河床変動計算上での安定条件について検討したが、式 (5) の条件を満たさない場合、計算結果がどのようなものになるかは十分検討できなかったため、式 (5) についてはもう少し検討する必要がある。

(参考文献) 1) de Vries M; Proc. IAHR, 1965. 2) 黒木岸・清水; 第 17 回自然災害科学総合シンポジウム, 1980.10.

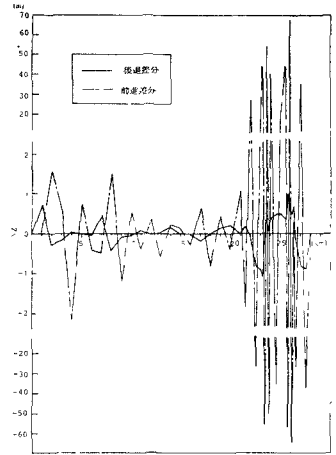


図-2 前進差分と後退差分による河床変動

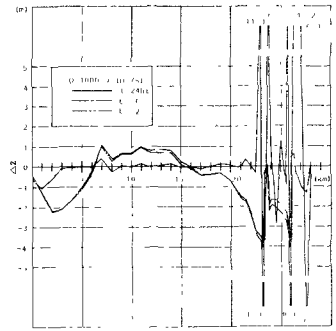


図-3 $Q = 1000 m^3/s$ における河床変動

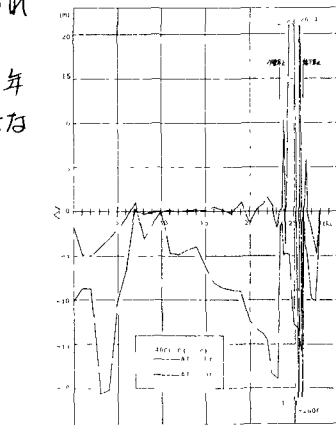


図-4 $Q = 4000 m^3/s$ における河床変動

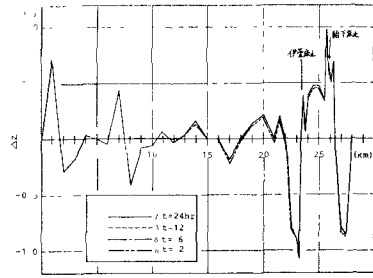


図-5 日流量時系列を用いた河床変動