

連行従動荷重を受ける梁の動的挙動について

山口大学 正員 會田 忠義
 " 学生員 小松 茂生
 広島市 奥野 泰規
 北九州市 横矢 順二

まえがき ある一定の間隔を保ちつつ、ある速度で従動荷重が梁上を走行する場合、梁の運動方程式は Hill 型の方程式になる。¹⁾ Hill 型の方程式は安定解と不安定解をもつことが知られている。本研究は運動方程式より Hill 型の攪乱方程式を求め、不安定現象、すなわち、時間の経過とともに振動変位が増大する不安定振動を起す荷重条件を Baloutin の方法²⁾により求め、無次元パラメータ平面で明らかにしようとするものである。

攪乱方程式 荷重間隔 a 、走行速度 V で、集中荷重 $P \cos \omega t$ (ω : 荷重振動数、 P : 荷重振幅、 P は y 軸の正方向が正) が、スパン l の梁上に連続移動するとき、運動方程式は次式で表わされる¹⁾。

$$(A + A_M(t))\ddot{y} + (B + P C(t))\dot{y} + d = 0 \quad (1)$$

ここで、 $A_M(t)$ と $C(t)$ は周期 $T = a/V$ をもつ。

連行従動荷重を受けて定常振動(定常振動解 $\bar{y}$ とする)している状態に、小さい攪乱($\bar{y}$)をよそよと、運動方程式は式(2)となる。

$$(A + A_M(t))(\ddot{\bar{y}} + \ddot{\bar{y}}) + (B + P C(t))(\dot{\bar{y}} + \dot{\bar{y}}) + d = 0 \quad (2)$$

したがって、式(1)を考慮すると、次の攪乱方程式が得られる。

$$(A + A_M(t))\ddot{\bar{y}} + (B + P C(t))\dot{\bar{y}} = 0 \quad (3)$$

式(3)は $(A + A_M(t))^{-1}(B + P C(t))$ が同じように、周期 $T = a/V$ をもつことから Hill 方程式に相当する。

$A_M(t)$ と $C(t)$ が周期 $T = a/V$ をもつので、それぞれを Fourier 級数に展開する。

$$\left. \begin{aligned} A_M(t) &= A_0 + \sum_{p=1}^{\infty} (A_{1p} \cos p\omega_0 t + A_{2p} \sin p\omega_0 t) \\ C(t) &= C_0 + \sum_{p=1}^{\infty} (C_{1p} \cos p\omega_0 t + C_{2p} \sin p\omega_0 t) \end{aligned} \right\} \quad (4) \quad \begin{aligned} & \text{ここで、} \omega_0 = 2\pi a/V \text{ (荷重移動振動数)} \\ & \omega = \alpha \omega_0, \alpha: \text{整数とする。} \end{aligned}$$

攪乱方程式は次のようになる。

$$\left[A + \left\{ A_0 + \sum_{p=1}^{\infty} (A_{1p} \cos p\omega_0 t + A_{2p} \sin p\omega_0 t) \right\} \right] \ddot{\bar{y}} + \left[B + P \left\{ C_0 + \sum_{p=1}^{\infty} (C_{1p} \cos p\omega_0 t + C_{2p} \sin p\omega_0 t) \right\} \right] \dot{\bar{y}} = 0 \quad (5)$$

境界振動数方程式 Hill 型方程式の解について、周期係数 C の周期と同じか、あるいは、2倍の周期をもつ周期解がパラメータ平面において、安定領域と不安定領域を区分する。より厳密にいうと、同じ周期をもつ2つの解が不安定領域を区分し、異なる周期をもつ解が安定領域を区分することが知られている²⁾。

C と A_M が周期 $T = a/V$ をもつので、周期 $2T$ をもつ周期解を式(6)で表わす。

$$\bar{y} = \sum_{j=1,3,5}^{\infty} (a_j \cos j\omega_0 t + b_j \sin j\omega_0 t) \quad (6), \quad a_j \text{ と } b_j \text{ は時間に無関係なベクトルである。}$$

上式を攪乱方程式(5)に代入し、調和バランス法を適用すると、 a_j と b_j を求めるための同次方程式が得られる。これより、 a_j と b_j が存在するための条件、すなわち、式(6)の境界振動数方程式が得られる。

$$\left| -\frac{\omega_0^2}{4} ([A]_1 + \frac{1}{2} [A_M]_1) + [B]_1 + \frac{1}{2} P [C]_1 \right| = 0 \quad (7)$$

ここで、

$$[A]_1 = \begin{bmatrix} j^2 A & & & \\ & j^2 A & & \\ & & j^2 A & \\ & & & j^2 A \end{bmatrix}, \quad [A_M]_1 = \begin{bmatrix} -j^2(2A_0 + A_{13}), & j^2(A_{11} + A_{12}), & j^2(A_{22} - A_{21}), & j^2 A_{23}, & \dots \\ \dots & j^2(A_{11} + A_{12}), & j^2(2A_0 + A_{11}), & j^2 A_{21}, & j^2(2A_{22} + A_{21}) \dots \\ \dots & j^2(A_{22} - A_{21}), & j^2 A_{21}, & j^2(2A_0 - A_{11}), & j^2(A_{11} - A_{12}) \dots \\ \dots & j^2 A_{23}, & j^2(A_{22} + A_{21}), & j^2(A_{11} - A_{12}), & j^2(2A_0 - A_{13}) \dots \end{bmatrix}$$

$$[B]_1 = \begin{bmatrix} B & & & \\ & B & & \\ & & B & \\ & & & B \end{bmatrix}, [C]_1 = \begin{bmatrix} -(2C_0 + C_{13}), (C_{11} + C_{12}), (C_{22} - C_{21}), C_{23} & \dots \\ \dots (C_{11} + C_{12}), (2C_0 + C_{11}), C_{21}, (C_{22} + C_{21}) & \dots \\ \dots (C_{22} - C_{21}), C_{21}, (2C_0 - C_{11}), (C_{11} - C_{12}) & \dots \\ \dots C_{23}, (C_{22} + C_{21}), (C_{11} - C_{12}), (2C_0 - C_{13}) & \dots \end{bmatrix}$$

一方、周期 T をもつ周期解を式(8)で表わす。

$$\bar{y} = \frac{1}{2} a_0 + \sum_{s=2,4,6}^{\infty} (a_s \cos \frac{1}{2} s \omega_0 t + b_s \sin \frac{1}{2} s \omega_0 t) \quad (8), \quad a_0 \text{ も時間的に無関係な定数である。}$$

上式を式(5)に代入し、調和バウンス法と適用すると、 a_0, a_s および b_s を求める同次方程式が得られる。これより、次の境界振動数方程式が得られる。

$$-\frac{\omega_0^2}{4} ([A]_2 + \frac{1}{2} [A_M]_2) + [B]_2 + \frac{1}{2} P [C]_2 = 0 \quad (9)$$

そこで、

$$[A]_2 = \begin{bmatrix} 4^2 A & & & \\ & 2^2 A & & \\ & & 0 & \\ & & & 2^2 A \\ & & & & 4^2 A \end{bmatrix}, [A_M] = \begin{bmatrix} 4^2(2A_0 + A_{14}), 2^2(A_{11} + A_{12}), 0, 2^2(A_{23} - A_{21}), 4^2 A_{24} & \dots \\ 4^2(A_{11} + A_{13}), 2^2(2A_0 + A_{12}), 0, 2^2 A_{22}, 4^2(A_{23} + A_{21}) & \dots \\ 4^2 A_{12}, 2^2 A_{11}, 0, 2^2 A_{21}, 4^2 A_{22} & \dots \\ 4^2(A_{23} - A_{21}), 2^2 A_{22}, 0, 2^2(2A_0 - A_{12}), 4^2(A_{11} - A_{13}) & \dots \\ 4^2 A_{24}, 2^2(A_{23} + A_{21}), 0, 2^2(A_{11} - A_{12}), 4^2(2A_0 - A_{14}) & \dots \end{bmatrix}$$

$$[B]_2 = \begin{bmatrix} B & & & \\ & B & & \\ & & \frac{1}{2} B & \\ & & & B \end{bmatrix}, [C]_2 = \begin{bmatrix} -(2C_0 + C_{14}), (C_{11} + C_{13}), C_{12}, (C_{23} - C_{21}), C_{24} & \dots \\ \dots (C_{11} + C_{13}), (2C_0 + C_{12}), C_{11}, C_{22}, (C_{23} + C_{21}) & \dots \\ \dots C_{12}, C_{11}, C_0, C_{21}, C_{22} & \dots \\ \dots (C_{23} - C_{21}), C_{22}, C_{21}, (2C_0 - C_{12}), (C_{11} - C_{13}) & \dots \\ \dots C_{24}, (C_{23} + C_{21}), C_{22}, (C_{11} - C_{13}), (2C_0 - C_{14}) & \dots \end{bmatrix}$$

式(7)と(9)より、結合共振を除く係数振動不安定領域の境界における ω_0 と P の関係が求まる。

解析例 π 断面ばり¹⁾の不安定領域の算出結果を図に示す。図中、縦軸は、荷重移動振動数 ω_0 と平均荷重(フーリエ級数の初項 C_0, A_0)作用時の梁の固有振動数 Ω で割った無次元量を、横軸は無次元荷重 $P = P / \{EI_0 (\frac{L}{\pi})^4 + GK (\frac{L}{\pi})^2\}$ を取った。数値計算によって、曲がおよび曲がりの振動変位は1次モードのみを用い、周期解(6)は2項($s=1,3$)、周期解(8)は3項($s=2,4$)までを取り近似計算を行った。Fig. 1に $P_0 \delta = 9/16$ の状態で作図したときの不安定領域を、Fig. 2に $P_0 \delta = 1$ の状態で作図したときの不安定領域を示す。

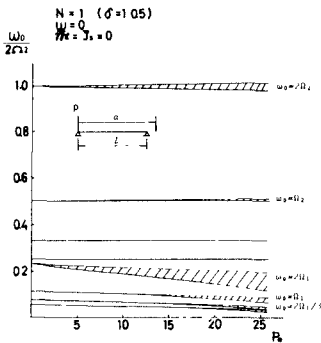


Fig. 1

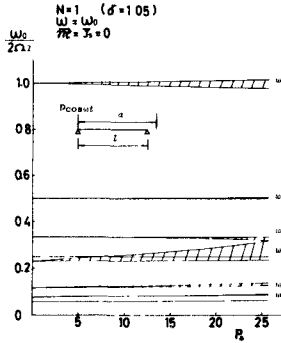


Fig. 2

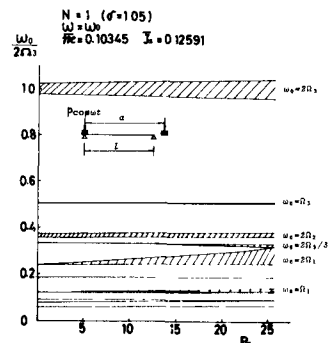


Fig. 3

- 1) 倉田・小松・三浦: 延動走行荷重を受けた梁の動的挙動について, エネルギー中四国支部, 昭和46年度, 学術講演
- 2) ホローカニ: 弾性系の動的安定(近藤, 中田試), コロナ社, p.16, 昭和46年.

[全, 一般講演概要]