

Timoshenko 梁の差分解法について

吳高壽 正 久良喜代彦

1. まえがき 横衝撃を受ける梁の断面が長さに対して大きいような場合には単純な仮定に立脚する Bernoulli-Euler 式の適用性は悪くなり、梁の剪断たわみならびに回転慣性を考慮に入れた Timoshenko 式

$$E \cdot I \cdot \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + k' \cdot G \cdot A \cdot \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} - I \cdot \frac{\partial}{\partial x} \cdot \frac{\partial^3 y}{\partial t^3} = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \cdot A \cdot \left(\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} \right) - k' \cdot G \cdot A \cdot \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} = 0 \quad (2)$$

の使用が望まれる。(y, θ はそれぞれ曲げ、剪断たわみ)

本研究は Timoshenko 式 (1), (2) を差分的手法で解く数値解析法を開発し、それをレジンモルタル梁のスパン中央に鋼球を落下させて横衝撃を加える場合に適用し、実験データならびに振動形解析法による解と比較することにより、差分解法の適用性について検討しようとするものである。な

お、鋼球と梁との接触については Hertz の式 $F = k \cdot \alpha^{\frac{3}{2}}$, $\alpha = y_r - y_l$ (3) を用いることにする。

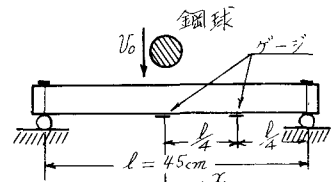


図1 レジンモルタル梁

2. 差分解法 計算目的のために梁を要素に分割し、一方、衝撃後の経過時間を長さ Δt の微小時間に分割する。Timoshenko 式 (1), (2) および鋼球の運動方程式 $m \cdot \frac{d^2 y_r}{dt^2} = -F$ (4) を夫々、1 次の微分方程式に分解し、その各々を差分式に転化して得られる 1 次方程式群に Hertz の式 (3) を含めたものを次のように排列する。

$$\begin{aligned} (y_r)_n &= (y_r)_{n-1} + (v_r)_{n-1} \cdot \Delta t \\ (y_i)_n &= (y_i)_{n-1} + (v_i)_{n-1} \cdot \Delta t, \quad (i=1, 2, \dots, p) \\ (\alpha)_n &= (y_r)_n - (y_l)_n \\ (F)_n &= k \cdot \{(\alpha)_n\}^{\frac{3}{2}}, \quad \text{ただし } (\alpha)_n \leq 0 \text{ のとき } (F)_n = 0 \\ (\theta_i)_n &= (\theta_i)_{n-1} - (\omega_i)_{n-1} \cdot \Delta t, \quad (i=1, 2, \dots, p-1) \\ (M_i)_n &= -E \cdot I_i \cdot 2 \cdot (\theta_i)_n / \Delta x \\ (M_i)_{n-1} &= -E \cdot I_i \cdot \{(\theta_i)_n - (\theta_i)_{n-1}\} / \Delta x, \quad (i=2, 3, \dots, p-1) \\ (M_p)_{n-1} &= 0 \\ (\beta_i)_n &= \{ (y_{i+1})_n - (y_i)_n \} / \Delta x - (\theta_i)_n, \quad (i=1, 2, \dots, p-1) \\ (Q_i)_n &= G \cdot k' \cdot A_i \cdot (\beta_i)_n, \quad (i=1, 2, \dots, p-1) \\ (\omega_i)_n &= (\omega_i)_{n-1} + \{ (M_{i+1})_n - (M_i)_n \} / \Delta x - (Q_i)_n \cdot g \cdot \Delta t / (I_i \cdot x), \\ &\quad (i=1, 2, \dots, p-1) \\ (v_r)_n &= (v_r)_{n-1} - (F)_n \cdot g \cdot \Delta t / W_r \\ (v_i)_n &= (v_i)_{n-1} + 2 \cdot \{ (Q_i)_n + (F)_n \} \cdot g \cdot \Delta t / W_i \\ (v_i)_n &= (v_i)_{n-1} + \{ (Q_i)_n - (Q_{i-1})_n \} \cdot g \cdot \Delta t / W_i, \quad (i=2, 3, \dots, p-1) \\ (v_p)_n &= 0 \end{aligned}$$

記号の説明

A	断面積 (cm ²)
B	剪断たわみ角
δ	梁材料の単位体積重量 (kg/cm ³)
E	弾性係数 (kg/cm ²)
F	鋼球と梁との接触力 (kg)
G	梁材料の剛性率 (kg/cm ²)
k	Hertz の定数
k'	梁断面の剪断係数
I	断面 2 次モーメント (cm ⁴)
i	梁の各部を表わす添字 (衝撃直後 1 とする。)
M	曲げモーメント (kg-cm)
n	時間間隔に付いた番号
p	梁の要素部分を表わす添字
Q	剪断力 (kg)
r	鋼球を表わす添字
θ	曲げによるたわみ角
v	変位速度 (cm/sec)
W	重量 (kg)
y	鉛直方向変位 (cm)
ω	梁要素の回転角速度 (1/sec)
() _n	時間間隔 n にあつた量であることを表わす。

初期条件として $v_r = v_0$ (衝撃速度), $(y_l)_0 = (v_l)_0 = (\theta_l)_0 = (\omega_l)_0 = 0$, $(i=1, 2, \dots, p)$ を与えて上記の方程式群を一つの時間間隔について上から順に解いて行く。これを反覆することによつて y_i, M_i 等の波形が得られる。応力波の減衰を考慮する場合には Voigt 型の減衰モデルを用いることにし、上記の中の M_i は次式で与える。

$$(M_i)_n = -E \cdot I_i \cdot \{ (\theta_i)_n - (\theta_{i-1})_n + \tau \cdot \{ [(\theta_i)_n - (\theta_{i-1})_n] - [(\theta_{i-1})_n - (\theta_{i-2})_n] \} / \Delta t \} / \Delta x, \quad \text{ただし } \tau \text{ は内部摩擦係数 (sec)}$$

3. 実験の概要 レジンモルタルの結合材には不飽和ポリエステル樹脂(武田薬品工業製)を用いた。その配合なうがに静的特性を表1, 表2に示す。衝撃試験には $5 \times 5 \times 50$ cmの角柱供試体を用い、スパン $l = 45$ cmで両端を単純支持とした。スパン中央なうがに各梁の下縁に共ゲージK10A1各1枚を貼布した。(図1)

梁のスパン中央に種々の落高で鋼球を落下させて横衝撃を加え、ゲージ貼布位置の歪み波形状をシンクロスコープDS5016で観測した。

鋼球は直至2.86, 4.2, 5.08, 7.62 cmのものをを用いた。実験結果として得られた歪み波形状の1例を写真1に示す。

4. 計算ゲージ 上記の実験を道路するために行った計算では時間間隔 $\Delta t = 0.5 \times 10^{-6}$ sec, 梁の分割数 $N_d = 20$ (分割長 $\Delta x = 2.25$ cm), 衝撃速度 $v_0 = \sqrt{2 \cdot g \cdot h_r}$ (h_r : 鋼球の落高)とした。又、梁材料の弾性係数 E には動的弾性係数 $E_D = 2.33 \times 10^5$ kg/cm²を用い、梁断面の断面係数は $I' = 0.66667$ とした。なお、鋼球の弾性係数およびポアソン比は夫々 2.1×10^6 kg/cm², 0.29とした。

5. 実験なうがに計算結果の検討 検討の結果、得られた主要な結論は次の通りである。

i 応力波の減衰を考慮しない場合、差分解析で得られた応力波形状と実験応力波形状とは初期の立上り部分では大畧一致したが、その後においてはかなりの開きが出て来ている。(図2)

ii 減衰を考慮することによって少くとも過渡振動の領域では理論波形状を実測波形状にかなりよく一致させることが出来るように思われる。(図2)

iii 本研究では梁材料の内部摩擦係数で $5 \times 10^{-6} \sim 10^{-5}$ sec程度にした時に良好な結果が得られたが、減衰の原因としては、むしろ、支床におけるエネルギーの逸散によるものの方が大きいように思われる。

iv 一種の近似解法である差分解析法による解は振動形解析法による解とかなりよく一致した。

v 過渡振動の領域では差分解析法の適用性は良好のように思われる。

vi 衝撃によるスパン中央下縁の最大曲げ引張歪みは衝撃速度 v_0 に大畧比例した。なお、この比例関係は破壊応力に到るまで持續するように思われる。

参考文献

- 1) 久米喜次郎: 単純支持梁の曲げ応力波に関する数値解析法について, 関西学術研究報告16巻2号, 1981.
- 2) Goldsmith, W.: Impact, Arnold, London, 1960.

表1 レジン・モルタルの配合(重量比)

樹脂	ポリマーLVXGK2	20 %
砂	豊浦産	56 "
炭酸カルシウム		24 "
促進剤	ナフチン酸エバール	0.5 *
硬化剤	ルパゾールDDM	0.55 *

* ポリマーLVに対する重量比

表2 レジンモルタルの特性

単位体積重量	0.002 kg/cm ³
静的弾性係数	2.16×10^5 kg/cm ²
動的 " " "	2.33×10^5 "
ポアソン比	0.275
圧縮強度	986 kg/cm ²
引張強度	112 "
曲げ強度	375 "

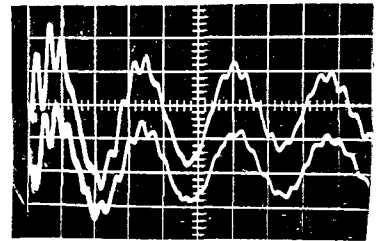


写真1 鋼球直径 $\phi = 5.08$ cm, 落高 $h_r = 10$ cm
上: スパン中央, 下: 各位置 応力波形状
縦 38.75 kg/cm²/div, 横 1ms/div

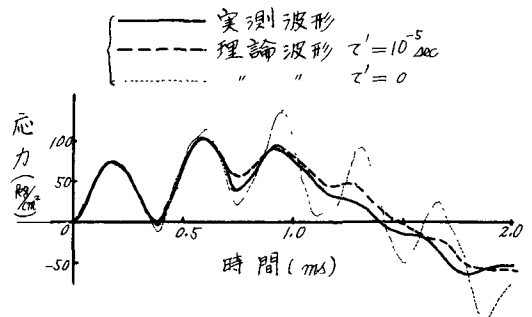


図2. スパン中央下縁 応力波形状
(鋼球直径4.2cm, 落高20cmの場合)