

徳山高専 正員 ○工藤 洋三
徳山高専 正員 橋本 聖一

1 はじめに

ステップ荷重などの衝撃荷重をうける構造物の動的応答を、波動伝播問題として有限要素法によって解き、その精度などについて検討した研究としては、Constantino の研究¹⁾がよく知られている。この研究では棒の側面を拘束し、棒端にステップ荷重を入射してその際の変位、応力などを検討し、波頭における応力が初等解から大きく乱れることを指摘している。その後の波動伝播問題の精度に関する研究の多くは、このオーバーシュート分を小さくし、1)に初等解に近づけるかという点に力点があかれ、そのための数値積分法などの開発に努力が注がれてきたように思われる。すなわち波動伝播問題の解と比較する場合、棒構造を平面問題としてとりあつかい、二次元有限要素を用いて解析し、理論値として初等解を用いて比較するというやり方が一般的である。

本研究は、軸対称三角形有限要素を波動伝播問題に適用するにあたり、その精度を半無限丸棒中を伝播する波動に対する解析解と比較し、その適用可能性をさぐるようとするものである。このため、解析解として、Skalak などによって与えられた衝突問題の解²⁾を用い、これと数値解との比較検討をこころみた。

2 計算方法

2.1 解析解の誘導

Fig. 1 に示すような、速度 v で衝突する半径 a の半無限丸棒を扱う。この場合の軸方向ひずみ ε_z は Skalak により次のように与えられている。

$$\varepsilon_z = \frac{v}{\pi C_0} \left[\int_0^{\infty} \frac{\sin(\alpha'\eta + \frac{1}{3}\eta^3)}{\eta} d\eta + \int_0^{\infty} \frac{\sin(\alpha''\eta + \frac{1}{3}\eta^3)}{\eta} d\eta \right]$$

$$\begin{aligned} \text{ここに} \quad \alpha'' &= \frac{z''}{\sqrt[3]{3} dt} & \alpha' &= \frac{z'}{\sqrt[3]{3} dt} \\ z'' &= -z - C_0 t & z' &= z - C_0 t \\ d &= \nu^2 \alpha^2 C_0 / 4 \end{aligned}$$

であり、 ν , C_0 はそれぞれ、ポアソン比、初等理論による棒の縦波の速度である。実際の計算は、上式を台形公式を用いて数値積分し、一定の範囲内に収束するまで積分範囲を拡大して計算を続けた。得られた結果を Fig. 2 に示す。これによれば、初等解からのオーバーシュート分は約 28% に達しており、振幅、位相ともに Skalak の解にほぼ一致している。

2.2 数値計算

数値計算に用いたモデルを Fig. 3 に示す。解析解としては半無限棒を扱っているが、波頭の部分を対象にしていること、および集中質量マトリックスを用いていることなどのために、波動が棒端に伝わるまでの時間は、半無限棒と同様の挙動が期待されると考え、図に示すような有限長さの棒とした。二本の棒が接触しているかどうかは、接触する節点の変位に重複部分があるかどうかという点から判断し、接触後は両節点の変位の重複分を $1/2$

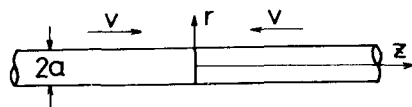


Fig. 1

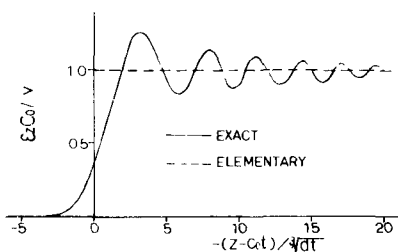


Fig. 2

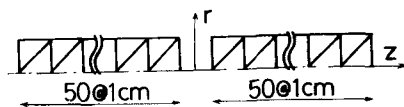


Fig. 3

づつ対応する節点にかり分け、その隣に生じる節点力を外力としてとり扱った。

逐次積分法としては、Newmarkの β 法を、 $\beta = 1/6$ 、 $\gamma = 1/2$ として用いた。また材料定数として弾性係数 $2.1 \times 10^6 \text{ kgf/cm}^2$ 、単位体積重量 7.85 gf/cm^3 を用いた。

ポアソン比を変化させて Skalak の解と比較した結果を Fig. 4 に示す。いずれの場合も、波頭部分にあり、初等解から 20% 程度のオーバーシュートを生じており、解析解にかなりよく追従している。これに対して、時間の経過による位相の変化は、各ポアソン比によってかなりの食い違いをみせている。ポアソン比 0.45 のものは、波頭の振動部分の4番目のピークあたりまでかなりよく追従しているが、この位が小さくなるにつれて Skalak の解からのかなりの位相の変化を生じている。

このポアソン比に対応する各系の、衝突面に関する要素の最大固有円振動数は、それぞれ 0.156×10^7 、 0.170×10^7 、 0.217×10^7 、 $0.297 \times 10^7 \text{ Hz}$ であり、ポアソン比の増加とともにその値も増加している。また、ステップ関数を周波数分解し、この固有円振動数でカットオフした場合、数値解析により得られた波形とよく対応する。すなわち、数値解の厳密解からの偏りの原因のひとつは、要素の離散化による高周波成分のカットオフに起因するものではないかと考えられる。(しかしながら、この他にも、時間間隔や、逐次積分法の選定に関する原因などがあると考えられ、検討の余地を残している。

3 おわりに

以上の検討の結果以下の結論を得た。

1) 従来、波動伝播問題の数値解析法の精度を比較する場合、初等解を理論解として用いることが多かったが、初等解は波速が一定で極めて簡単な形で解が得られ、汎用性の点ですぐれている反面、波動の高周波成分の挙動による分散効果をうまく近似できない。このため理論解としての初等解の適用には充分な注意と配慮が必要である。一先、今まで誤差としてとり扱われてきた初等解からのみずみのオーバーシュート分は、波動の分散効果を、結果においてよく近似していることが明らかとなった。

2) 厳密解からの位相の変化を生じる原因のひとつとして、要素の最大固有円振動数に関連した高周波成分のカットオフが生じていることが考えられる。すなわち、厳密解においては、高周波成分が、その成分に応じた波速の遅れを生じて振動するのに対して、数値解析ではこれらの成分がカットオフされるためと考えられる。

(参考文献)

1. Costantino, C. J. : Finite Element Approach to Stress Wave Problems, Proc. ASCE, EM43, 153-176 (1967)
2. Skalak, R. : Longitudinal Impact of a Semi-infinite Circular Elastic Bar, J. Appl. Mech. 34, 59-64 (1957)

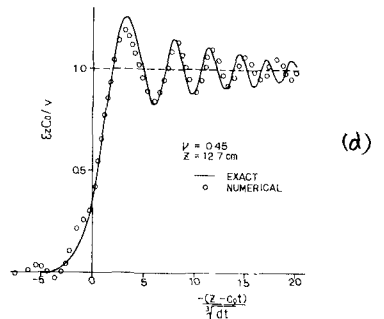
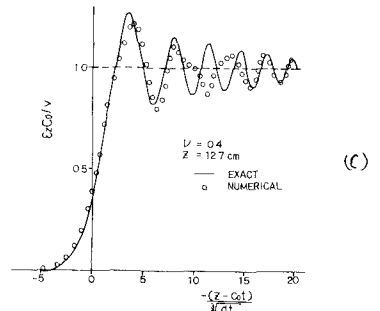
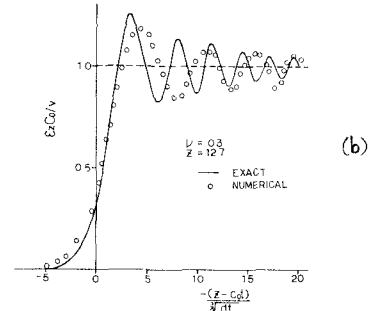
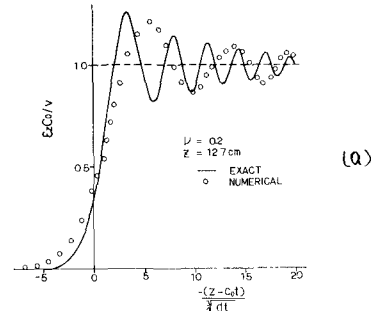


Fig. 4