動的問題における最適規準に関する一考察

京都大学工学部　正員　山田善一
京都大学工学部　正員　古川浩平
京都大学工学部　学生員　平野 功
阿南高専　正員 ○横田健一

1 まえがき

構造物の最適設計に，SLP法 および SUMT法などの数理的手法を適用した研究は 古くから多くの人々によって発表され多大な成果をおさめている。 それらの手法の長所は解法の汎用性 および 数学的な厳密性を有することであり これらは周知の認めるところである。

しかしながら 最適解への収束性に関して 計算量，あるいは 反復回数が設計変数 および 制約条件の数に大きく左右される欠点があり 次第に 構造物が大規模化されつゝある現在，問題点も多く より効果的な設計法が要求される。 このような問題に対して全応力設計法 および 最適化規準法が提案され 各種構造物に適用されているが その多くは静的荷重を対象としたもので 動的問題に関するものは きわめて少ない。

そこで本研究では 地震力を考慮した動的荷重に対する全応力設計 および エネルギー理論に基づく最適規準について述べ タワー構造物を対象に SUMT法の結果と比較して その適性を検討する。

2 動的応答解析

動的荷重を受ける多自由度系の構造物の運動方程式は 相対変位 x，入力加速度 $\ddot{z}$ とすると

$\mathbb{M}\ddot{x}+\mathbb{C}\dot{x}+\mathbb{K}x=-\mathbb{M}\ddot{z}$ --------(1) で表わされる。

こゝで 規準化されたモーダルマトリックスを Φ，一般化変位ベクトルを q とすると $x=\Phi q$ となり 直交条件を考慮して変形すると $\mathbb{I}\ddot{q}+\left[\diagdown(2\beta_j\omega_j)\diagdown\right]\dot{q}+\left[\diagdown(\omega_j)^2\diagdown\right]q=-\left[\diagdown(\Gamma_j)\diagdown\right]\ddot{z}$ --------(2) となる。 こゝに Γ_j，ω_j，β_j は それぞれ j 次の刺激係数，固有振動数，減衰定数である。 さらに $q=\left[\diagdown(\Gamma_j)\diagdown\right]\mathbb{r}$ とおいて 式(2) に代入すると $\mathbb{I}\ddot{\mathbb{r}}+\left[\diagdown(2\beta_j\omega_j)\diagdown\right]\dot{\mathbb{r}}+\left[\diagdown(\omega_j)^2\diagdown\right]\mathbb{r}=-\ddot{z}$ -------(3) となり 1自由度系と全く同じ式となる。

上式中の $\mathbb{r}$ は 式(3) を数値積分することにより求まるが 我々が設計に際して必要なのは 主として最大値であるので 既知の地震波に対して示された応答スペクトルより $r_{j\,max}=k\,\ddot{z}_{max}/\omega_j^2$ -------(4) を求め，

$x=\Phi\left[\diagdown(\Gamma_j)\diagdown\right]\mathbb{r}$ ----(5) を参考にして $x_{max(i)}=\sqrt{\sum_j(\Gamma_j\phi_j(i)\,r_{j\,max})^2}$ --------(6) より構造物の質点 i の最大変位を求めることができる。 式(5)の k は応答倍率 式(6)の $\phi_j(i)$ は j 次モードにおける i 点の相対変位を表わす。 i 点の曲げモーメントは 差分法により $M_i=-\left(\frac{EI}{b^2}\right)\{x_{i+1}-2x_i+x_{i-1}\}$ ------(7) で表わされる。
こゝに b，E，I は それぞれ タワーの質点間の距離，鋼材の弾性定数，断面2次モーメントである。
最大変位を求めると同様に考えると i 点の最大曲げモーメントは $M_{max(i)}=\left(\frac{EI}{b^2}\right)\sqrt{\sum_j(\Gamma_j A_j(i)\,r_{j\,max})^2}$ ----(8)
より求めることができる。式(8) 中 $A_j(i)=\phi_j(i+1)-2\phi_j(i)+\phi_j(i-1)$ である。

3 全応力設計 および 最適化規準を用いた設計

(1) 全応力設計

動的問題における全応力設計は 断面変更に伴う構造物の固有周期の変化により 応答倍率が異なるため，静的な場合と違い容易でない。本研究では最も単純な応力比例法を用い 各cycle における断面変更を式(9) のように仮定し 収束解が得られるまで 反復計算を行なった。

$A_i^{\nu+1}=A_i^{\nu}\dfrac{\sigma_i^{\nu}}{\sigma_a}$ ------- (9)　こゝで A_i^{ν}，σ_i^{ν} は ν 回目のサイクルにおける断面積，および 応力 $A_i^{\nu+1}$ は $\nu+1$ 回目のサイクルにおける断面積，σ_a は部材の許容応力である。

(2) 最適化規準を用いた設計

構造物の固有振動数 ω_j が ある制限許容振動数 ω_a となるような最小重量構造設計を行なうための最適化規準について考える。構造物の固有値 λ_j はレイリー商より j 次の固有モードを ϕ_j とすると 次式で与えられる。

$\lambda_j = \omega_j^2 = \dfrac{\Phi_j^t \mathbb{K} \Phi_j}{\Phi_j^t \mathbb{M} \Phi_j}$ -------(10)　一方　構造物の重量は　次式で与えられる。 $W = \sum_{k=1}^{m} A_k l_k \rho_k$ ----(11)
したがって　構造物の固有振動数が　制限許容振動数となる最小重量構造は　等式 $\lambda_j = \omega_j^2 = \omega_a$ に対するWの停留値を求めることにより決定される。この等式制約を含む最適問題は Lagrangeの乗数法が適用されるので Lagrange乗数λによって　次式て表わされる関数の最小値問題を考えればよい。 $W = \sum_{k=1}^{m} A_k l_k \rho_k + \frac{1}{\lambda}(\lambda_j - \omega_a^2)$ ---(12)
最小値は　$\dfrac{\partial W}{\partial A_i} = l_i \rho_i + \dfrac{1}{\lambda} \dfrac{\partial \lambda_j}{\partial A_i} = l_i \rho_i + \dfrac{1}{\lambda} \dfrac{2\Phi_j^t \mathbb{K}_i \Phi_j - \lambda_j \Phi_j^t \mathbb{M}_i \Phi_j}{A_i \Phi_j^t \mathbb{M} \Phi_j} = 0$ ------(13)　より決定される。
式(13)を変形し　Φ_jのかわり変位xを用い　卓越している1次モードだけを考慮すると　つぎのようになる。

$-\lambda = \dfrac{2x^t \mathbb{K}_i x - \lambda_1 x^t \mathbb{M}_i x}{A_i l_i \rho_i x^t \mathbb{M} x}$ ------(14)　$f_i = \dfrac{\partial \lambda_j}{\partial A_i}$とおくと　次式のようになる。

$-\lambda = \dfrac{f_i}{l_i \rho_i}$ --------(15)　したがって　ρ_i(密度)，l_i(部材長)がすべての部材に対して　等しい場合の構造物の重量を最小にするための最適規準は「各部材のf_iが全て等しくすること」となる。
しかし　f_iを等しくすることは容易でない。そこで　解析の対象としたタワー構造物では　頂点の変位x_1と1次の固有振動数ω_1が　経験的に反比例の関係にあると推定され　項点の許容変位をx_aとすると．
$x_a \omega_a \doteqdot x_1 \omega_1$ -----(16)　$\omega_a = x_1 \omega_1 / x_a$ -----(17)なる関係に注目して　変位制約を受ける構造物の最小重量設計の近似解法を考える。いま　各サイクルにおける断面変更を　$A_i^{\nu+1} = A_i^{\nu} + \Delta \delta A_i^{\nu}$ -----(18)と仮定し　各設計サイクルにおける必要な固有値の総変化量を　$\delta\lambda_0 = \omega_a^2 - \omega_1^2$ ------(19)とする。
さて　m個の部材からなる構造物において　部材iの断面変更量を　$\delta A_i = \alpha f_i$とすると　δA_iによる固有値の変化量は　$\delta\lambda_i = f_i \delta A_i = \alpha f_i^2$ ------(20)となる。したがって　構造物全体の断面変化による固有値の総変化量$\delta\lambda_0$は　$\delta\lambda_0 = \sum_{k=1}^{m} \delta\lambda_k = \sum_{k=1}^{m} \alpha f_k^2$ -----(21)となり　$\alpha = \dfrac{\delta\lambda_0}{\sum_{k=1}^{m} f_k^2}$より　求める断面変更量は$\delta A_i = \dfrac{\delta\lambda_0}{\sum_{k=1}^{m} f_k^2} f_i$ ------(22)
断面変更の基本式　式(18)は　$A_i^{\nu+1} = A_i^{\nu} + \Delta \cdot \dfrac{\delta\lambda_0}{\sum_{k=1}^{m} f_k^2} f_i$ ------(23)となる。　設計変数の初期値　および　massなどを入力データーとして与え　式(23)により　収束解が得られるまで　反復計算を行なう。

4．数値計算例　および　考察

本研究の対象とした　タワー構造物は図-1に示すようなものであり　数値計算において　項点の許容変位は1^m，入力最大加速度は200gal　．応答スペクトルは本四連絡橋の設計に用いた資料を参考にした。なお　部材はすべてH形鋼を使用した．　最適化規準による断面変更の過程　および　SUMT法による計算結果の一例を示すと表-1のようである。

その結果　3で示した最適規準の近似式　式(23)によって，SUMT法より　かなり少ない反復計算で十分最適に近い解を求めることができることを確認した。
しかし　式(16)は一部の応答解析結果より仮定したもので　これからの研究が必要と思われる。
なお，全応力設計などの詳細については　講演当日報告する。

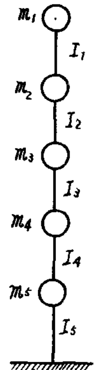

図-1 単純化されたタワー構造物

表-1 最適化基準による断面変更の過程　およびSUMT法の結果
m_0=(1000.0, 1000.0, 1000.0, 1000.0, 1000.0)
I=(1.0, 1.0, 1.0, 1.0, 1.0)
Δ= 0.4A_i

cycle No		Element No 1	2	3	4	5	Weight (t)	Deflection (m)
(a)最適規準								
1	$I(m^4)$	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1155.5	2.8857
	$f(\times 10^{-2})$	-0.30	0.42	1.54	3.88	5.64		
2	I	0.84	1.25	2.05	4.36	6.66	1880.2	1.5867
	f	0.57	3.94	6.06	5.90	5.34		
3	I	0.92	2.24	4.75	9.91	14.20	2670.5	1.1454
	f	3.31	6.41	7.33	7.52	7.47		
4	I	1.05	2.83	6.18	13.00	18.58	3093.3	1.0275
	f	4.41	7.19	7.98	8.32	8.19		
5	I	1.08	2.98	6.54	13.77	19.67	3112.1	1.0042
	f	4.64	7.35	8.06	8.50	8.36		
(b) SUMT法								
109cycle	I	1.33	3.32	6.76	13.68	17.63	3114.4	0.99996

参考文献

1) Venkayya, V.B and N.S. Khot : Design of optimum structure to impulse type loading . AIAA Journal vol13 No8
2) Gallagher, R.H and O.C.Zienkiewize,(川井忠彦，戸川隼人監訳)　最適構造設計　基礎と応用　培風館　など