

愛媛大学 正員 見沢繁光 大賀水田生
徳山高等 正員 重松恒美 原 隆
愛媛大学 学員 樋口志朗

1. まえがき

振動問題の解析法には、モード解析、シミュレーションなどがある。シミュレーションによる方法は直接的に解が求められ、非線形問題も考慮できる非常に一般性のある解析法であるが、解の安定を保持するためには細かい時間分割を必要とするため計算時間が長くなる。本研究では、容量削減・時間短縮のためにマトリックス関数を導入した方法により薄板の解析を行なった。マトリックス関数による振動解析法では、薄板の回転慣性とモーメント外力を無視し運動方程式を变形することにより計算容量を削減するとともに、自由振動問題の場合にはさらに小さい容量で計算を行なうことが可能となる。また、強制振動問題においても反復計算なしに、現時点での変位を一・二段階前の変位によって求めることができ、従来のシミュレーションに比して大きな時間間隔でも解の安定が保持され、計算時間の短縮を計ることが出来る。なお、解析例として、センターパルス、偏心パルスを外力として受ける薄板について数値計算を行なった。

2. マトリックス関数による解析法

薄板の剛性マトリックス $\bar{K}$ は Fig.1 に示すように長方形平板要素に分割し誘導した。なお、変位関数は次のように仮定した。

$$W = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 x^2 + \alpha_5 xy + \alpha_6 y^2 + \alpha_7 x^3 + \alpha_8 xy^2 + \alpha_9 x^2y + \alpha_{10} y^3 + \alpha_{11} x^2y + \alpha_{12} xy^2 \quad (1)$$

$$\theta_x = \frac{\partial W}{\partial y}, \quad \theta_y = -\frac{\partial W}{\partial x}$$

強制振動の運動方程式は一般に次式で与えられる。

$$\bar{M}\ddot{X} + \bar{C}\dot{X} + \bar{K}X = F \quad (2)$$

ここに $\bar{M}$: 質量マトリックス, $\bar{C}$: 減衰マトリックス

$\bar{K}$: 剛性マトリックス, X : 変位ベクトル

F : 外力ベクトル

また、 g_1, g_2 を係数とし減衰マトリックスを次式のように仮定する。

$$\bar{C} = g_1 \bar{K} + g_2 \bar{M} \quad (3)$$

薄板の場合、回転慣性は小さいので無視し、外力を垂直力のみ考慮すれば、(2)式は(3)式を代入することにより次式となる。

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \bar{M} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{d} \\ \dot{x} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} g_1 K_{11} & g_1 K_{12} \\ g_1 K_{21} & g_1 K_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d \\ x \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d \\ x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ f \end{bmatrix} \quad (4)$$

ただし $\{d\} = \{\theta_x \theta_y\}^T$

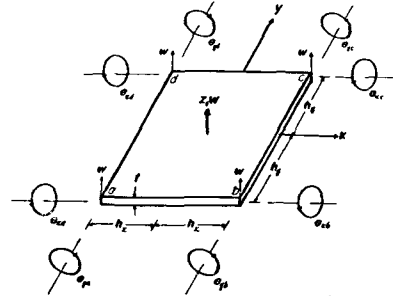


Fig.1 長方形平板要素

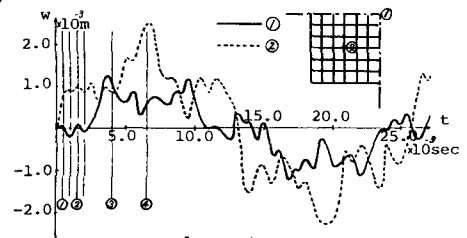


Fig.2 変位-時間曲線(センターパルス)

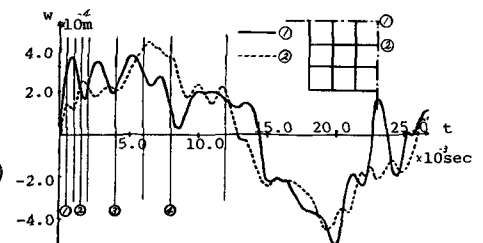


Fig.3 変位-時間曲線(偏心パルス)

ここで、各ベクトルの回報に関する項、 $\{d\}$ 、 $\{\dot{d}\}$ 、 $\{\ddot{d}\}$ を消去することにより次式を得る。

$$M\ddot{x} + C\dot{x} + Kx = f \quad (5)$$

$$\begin{aligned} \text{ただし} \quad C &= (K_{22} - K_{21}K_{11}^{-1}K_{12})g + M\ddot{g} \\ K &= K_{22} - K_{21}K_{11}^{-1}K_{12} \end{aligned}$$

この変換により得られた各マトリックスの大きさは(2)式のマトリックスの1/4の大きさになる。次に運動方程式(5)の解を求める際に外力を微小時間間隔において一定、すなわちステップ外力とすると一般解は次式となる。

$$\begin{aligned} x_{i+1} &= 2e^{-Bt} \cos \sqrt{D}t \cdot x_i - e^{-Bt} e^{-Bt} x_{i-1} \\ &\quad + [E - e^{-Bt} (\cos \sqrt{D}t + B \sqrt{D}^{-1} \sin \sqrt{D}t)] K^{-1} f_i \quad (6) \\ &\quad + e^{-Bt} (e^{-Bt} - \cos \sqrt{D}t + B \sqrt{D}^{-1} \sin \sqrt{D}t) K^{-1} f_{i-1} \end{aligned}$$

$$\text{ただし} \quad B = \frac{1}{2} M^{-1} C, \quad D = M K^{-1} B^2$$

上式により、 At 時間後の変位が現時点までの変位、外力および At 時間前の変位、外力によって表示された。ここで、特に自由振動問題を扱う場合、(6)式は(7)式となる。

$$x_{i+1} = 2 \cos \sqrt{D}t \cdot x_i - x_{i-1} \quad (7)$$

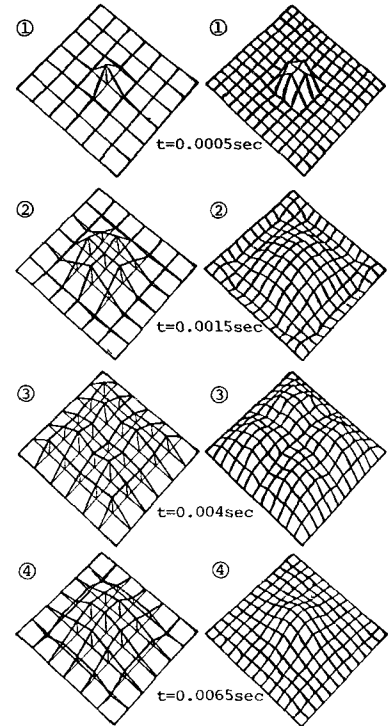
(7)式によつて、変位が一・二段階前の変位と $\cos \sqrt{D}t$ の項により表わされた。これは例えば(5)式の M 、 C 、 K などのマトリックスの大きさと同じである。なお、(6)式の e^{-Bt} 、 $\cos \sqrt{D}t$ 、 $\sin \sqrt{D}t$ は次の級数展開により求めた。

$$\begin{aligned} e^{-Bt} &= \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \frac{t^i}{i!} B^i \\ \cos \sqrt{D}t &= \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \frac{t^{2i}}{(2i)!} D^i \\ \sin \sqrt{D}t &= \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \frac{t^{2i+1}}{(2i+1)!} D^i \end{aligned} \quad (8)$$

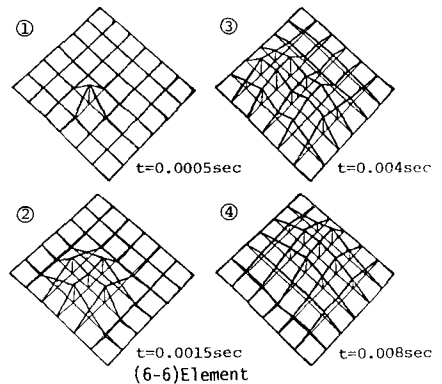
3 数値計算および結果

数値計算は、 $50 \times 50 \times 0.2 \text{ cm}$ 、ヤング係数 $2/100000 \text{ } \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2}$ 、ポアソン比 0.3 、単位体積質量 $7.85 \text{ } \frac{\text{kg}}{\text{cm}^3}$ の断面諸量を有する四辺単純支持の薄板で行なった。なお、パルス作用時間は 0.002 sec で単位パルスとした。Fig.2-3 はセンターパルス・偏心パルスを受ける(12-12)要素、(6-6)要素の薄板の変位-時間曲線である。Fig.4 は Fig.2 の①②③④での薄板の変形状態を示している。この場合(6-6)要素と(12-12)要素の薄板の周期はそれぞれ $T_6 = 0.0264 \text{ sec}$ 、 $T_{12} = 0.0257 \text{ sec}$ でよく一致している。また、板の変形状態も両方割はほぼ一致しているが、 $t = 0.0015 \text{ sec}$ 、 $t = 0.004 \text{ sec}$ のような複雑な変形状態では(6-6)要素より(12-12)要素に比して細かい所は適切には表現されていない。Fig.5 は Fig.3 の①②③④での薄板の変形状態を表わしている。

参考文献 1) W. Krings, H. Waller: Berechnung von instationären Tragwerksschwingungen mit Hilfe von Matrizenfunktionen, Die BAUTECHNIK, 1974 2) W. Krings, H. Waller: Numerische Berechnung von gedämpften Schwingungssystemen bei nichtperiodischen Erregungen, Die BAUTECHNIK, 1975



(6-6)Element (12-12)Element
Fig.4 薄板の変形状態(センターパルス)



(6-6)Element (12-12)Element
Fig.5 薄板の変形状態(偏心パルス)