

FE-TMによる板の座屈解析について

愛媛大学 正員 見沢繁光 正員 大賀水田生
徳山高専 正員 重松恒美 正員 原 隆

1. まえがき

今日、板の座屈解析においても有限要素法は最も有力で広く用いられている計算法であるが、大きな構造物の場合、精度の良い結果を得るためには多くの自由度が必要となり、必然的に大きな剛性マトリックスになる難点を有している。小さなマトリックスで板構造の座屈解析を行う方法としては有限帯板法、伝達マトリックス法などが考えられ、補剛板や折板構造に成果をあげている。しかし、これらの解析法は公式化が煩雑であることのほか、¹⁾ 構造物の形状とか境界条件に制限される問題点がある。そこで、本研究では Dokainish が板の振動問題に適用した有限要素 (FE) と伝達マトリックス (TM) を組み合わせる方法により板の座屈解析を行った。

2. 解析手順

本研究で用いた方法は、通常の有限要素法に用いられる剛性マトリックスから伝達マトリックスを誘導し、得られた伝達マトリックスを用いて座屈解析を行うものであり、剛性マトリックスまでは有限要素 (FE) の概念でそれ以後の計算は伝達マトリックス (TM) の手順で行うので本論文では FE-TM 法と称する。剛性マトリックスから伝達マトリックスを求める際、要素の形、自由度の数には制限されないが、ここではためみ w 、ためみ角 $\varphi = \partial w / \partial y$ 、 $\varphi_y = -\partial^2 w / \partial x^2$ の 3 節点自由度を有する矩形要素を用いるものとする (Fig. 1(b) 参照)。Fig. 1(a) に示される面内力を受ける板を i 個の strip に分割し、さらにそれぞれの strip を Fig. 1(b) のような有限要素に分割する。次に、すでに得られている矩形要素の剛性マトリックス、修正剛性マトリックスをそれぞれの strip ごとに組み込むが、その際、strip の左側の節点 (Fig. 1(b) の 1~ n 節点) の変位成分と右側の節点 (Fig. 1(b) の $m+1$ ~ $2m$ 節点) の変位成分を分けるように組み込む。 i 番目の strip の節点力と節点変位の関係は次のようになる。

$$\{ \{ K_b \}_i - k \{ K_m \}_i \} \{ \delta \}_i = \{ F \}_i \quad \text{または} \quad \{ K \}_i \{ \delta \}_i = \{ F \}_i \quad (2)$$

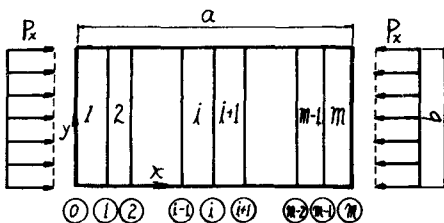
$$\begin{aligned} \text{ここに} \quad \{ \delta \}_i &= \{ w_1, w_2, \dots, w_n; \varphi_{y1}, \varphi_{y2}, \dots, \varphi_{yn}; \varphi_{y1}, \varphi_{y2}, \dots, \varphi_{yn}; w_{n+1}, w_{n+2}, \dots, w_{2n}; \varphi_{y(n+1)}, \varphi_{y(n+2)}, \dots, \varphi_{y(2n)}; \varphi_{y(n+1)}, \varphi_{y(n+2)}, \dots, \varphi_{y(2n)} \}^T \\ &= \{ w_i^L, \varphi_{y1}^L, \varphi_{y1}^L; w_i^R, \varphi_{y1}^R, \varphi_{y1}^R \}^T = \{ \delta_i^L, \delta_i^R \}^T \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \{ F \}_i &= \{ Q_1, Q_2, \dots, Q_n; M_{x1}, M_{x2}, \dots, M_{xn}; M_{y1}, M_{y2}, \dots, M_{yn}; Q_{n+1}, Q_{n+2}, \dots, Q_{2n}; M_{x(n+1)}, M_{x(n+2)}, \dots, M_{x(2n)}; M_{y(n+1)}, M_{y(n+2)}, \dots, M_{y(2n)} \}^T \\ &= \{ Q_i^L, M_{xi}^L, M_{yi}^L; Q_i^R, M_{xi}^R, M_{yi}^R \}^T = \{ F_i^L, F_i^R \}^T \end{aligned}$$

$\{ K_b \}_i, \{ K_m \}_i; \{ \delta \}_i, \{ F \}_i$ に対応して組み込まれた strip i の剛性マトリックス、

$k = b^3 P_x / \pi^3 D$: 座屈係数, $D \equiv Et^3 / (12(1-\nu^2))$: 板の曲げ剛性

式 (2) を変形させることにより strip の左側と右側の状態量と関係づける格間伝達マトリックスを作成する。



(a)



(b)

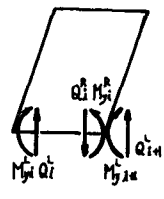


Fig. 2 断面力

Fig. 1 要素分割

まず、式(1)の剛性マトリックス $[K]$ を次のようにサブマトリックスに分割する。

$$\begin{Bmatrix} F^L \\ F^R \end{Bmatrix}_i = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{bmatrix}_i \begin{Bmatrix} \delta^L \\ \delta^R \end{Bmatrix}_i \quad (2)$$

簡単なマトリックス演算により strip の左右の状態量と関係付ける式が次のように得られる。

$$\begin{Bmatrix} \delta^R \\ -F^R \end{Bmatrix}_i = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{bmatrix}_i \begin{Bmatrix} \delta^L \\ F^L \end{Bmatrix}_i \quad (3)$$

$$\begin{aligned} [T_{11}]_i &= -[S_{12}^{-1}]_i [S_{11}]_i, [T_{12}]_i = [S_{12}^{-1}]_i \\ [T_{21}]_i &= -[S_{21}]_i + [S_{22}]_i [S_{12}^{-1}]_i [S_{11}]_i, [T_{22}]_i = -[S_{22}]_i [S_{12}^{-1}]_i \end{aligned}$$

ところで、Fig.1(a)の節線④の前後では変位成分 w, φ_x, φ_y は連続であり

$$w_{i+1}^L = w_i^R, \varphi_{xi+1}^L = \varphi_{xi}^R, \varphi_{yi+1}^L = \varphi_{yi}^R \quad (4)$$

となるが、節点力 Q, M_x, M_y は Fig.2 を参考にして次のようになる。

$$Q_{i+1}^L = -Q_i^R, M_{xi+1}^L = -M_{xi}^R, M_{yi+1}^L = -M_{yi}^R \quad (5)$$

式(4)、(5)と式(3)に代入すると strip $(i+1)$ の左側の状態量が strip i の左側の状態量で次のように表わされる。

$$\begin{Bmatrix} \delta^L \\ F^L \end{Bmatrix}_{i+1} = [T]_i \begin{Bmatrix} \delta^L \\ F^L \end{Bmatrix}_i \quad (6)$$

式(6)の $[T]_i$ が求める格間伝達マトリックスとなる。この伝達マトリックスの大きさは strip が 2m 個の節点を有する場合、 $2m \times (節点の自由度数)$ となる。本論文では節点の自由度は 3 個なので $(6m \times 6m)$ のマトリックスとなる。この伝達マトリックスを用いて左端(Fig.1(a)の①)の状態量を右端(Fig.1(a)の④)に伝達させることにより計算を行うが、その際、マトリックスの掛け合わせにより生じる誤差を小さくするために次の標準化を行っている。

$$\begin{aligned} {}^*w &= Dw, & {}^*\varphi_x &= -bD\varphi_x, & {}^*\varphi_y &= bD\varphi_y \\ {}^*Q &= b^3Q, & {}^*M_x &= b^2M_x, & {}^*M_y &= b^2M_y \end{aligned} \quad (7)$$

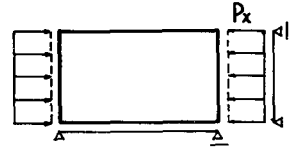
3. 数値計算および検討

表-1 は一方向圧縮力を受ける四辺単純支持での数値計算結果を示している。形状比 $b/a = 1.0 \sim 4.0$ の範囲で厳密解、有限要素法による解(6-6 分割)

と本法による解(6-6, 8-8, 10-10 分割)を示している。有限要素法と本法の解は数値計算での許容誤差の範囲で一致している。厳密解と本法の比較では形状比の小さいところでは分割数が少なくてもかなり良く一致しているが、形状比が大きくなるにつれて本法による解がかなり下まわっている。表-2 は二方向面内力を受ける二辺固定、この固定辺に相對する二辺が単純支持の場合の本法による解と他の解法による解を示している。なお、荷重比 P_y/P_x は 0.5, 1.0, 1.5 の場合である。この場合、いずれの形状比においても両解法の差は約 6% である。有限要素法と本法とのマトリックスの大きさの比較では有限要素法でバンドマトリックスを用いるとして、本法でのマトリックスが 6-6 分割で約 56%, 8-8 分割で 64%, 10-10 分割で 69% といふくらい小さくなっている。

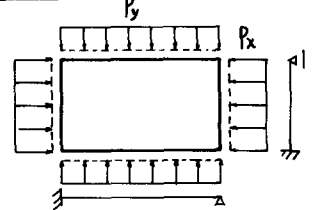
参考文献 1) M.A. Dokanish : A New Approach for Plate Vibrations, Transactions of the ASME, 1972
2) Timoshenko, Gere : Theory of Elastic Stability, McGraw-Hill, 1961 3) 長柱研究委員会: 弾性安定要覽, コロナ社, 1960

表-1 座屈係数



a/b	Ref. 2 k_0	FEM (6-6) k_1	FETM (6-6) k_1 (8-8) k_2 (10-10) k_3			$k_0 - k_3$ k_0
1.0	4.00	3.89	3.89	3.94	3.96	1.0
1.2	4.13	4.02	4.02	4.07	4.10	0.9
1.4	4.47	4.31	4.31	4.39	4.42	1.2
1.6	4.20	3.98	3.98	4.07	4.12	1.9
1.8	4.05	3.81	3.81	4.91	3.95	2.3
2.0	4.00	3.74	3.74	3.84	3.90	2.3
2.2	4.04	3.75	3.76	3.63	3.92	2.8
2.4	4.13	3.82	3.82	3.90	4.01	3.1
2.6	4.08	3.69	3.69	3.84	3.93	3.6
2.8	4.02	3.60	3.59	3.76	3.89	3.2
3.0	4.00	3.54	3.54	3.72	3.88	2.9
3.2	4.02	3.51	3.52	3.54	3.88	3.4
3.4	4.06	3.51	3.52	3.28	3.83	5.8
3.6	4.05	3.46	3.47	3.67	3.78	6.6
3.8	4.01	3.38	3.38	3.59	3.72	7.2
4.0	4.00	3.32	3.32	3.56	3.63	9.3

表-2 座屈係数



B	a/b	FETM (6-6) k	Ref. 3 k_0	$k_0 - k$ k_0
0.5	0.6	7.13	7.57	5.8
	1.0	4.14	4.40	5.9
	1.6	3.52	3.75	6.1
	2.0	3.43	3.74	8.3
1.0	0.6	6.22	6.57	5.3
	1.0	3.12	3.30	5.5
	1.6	2.27	2.40	5.4
	2.0	2.13	2.24	4.9
1.5	0.6	2.03	2.15	5.6
	1.0	1.98	2.12	6.6
	1.6	5.49	5.80	5.3
	1.0	2.49	2.64	5.7
	1.6	1.66	1.77	6.2
	2.0	1.51	1.60	5.6
	2.6	1.41	1.50	6.0
	3.0	1.38	1.46	5.5