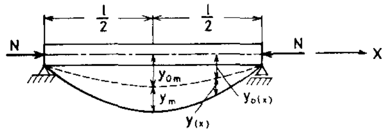
信頼性理論に基づく圧縮部材の最小費用設計法

愛媛県庁　正会員　○清水満樹
鳥取大学工学部　正会員　白木　渡
鳥取大学工学部　正会員　高岡宣善

1．まえがき　本研究では，先に発表した確率過程論による構造物の最適設計手法[1)]を用いて，不規則な初期たわみを有する弾性鋼圧縮部材に時間に関して不規則に変動する荷重が作用する場合の信頼性理論に基づく最小費用設計法について述べ，圧縮部材の信頼度を合理的に定める1つの方法を示す。まず，圧縮部材の初期建設費および耐用期間中に起りうる破壊によって引き起される損失額の総和を最小にするような部材の最適設計変数（ここでは最適断面積）を求める最小費用設計法を示し，次にその方法を，部材強度を構成する各不規則要因が正規確率変数，作用荷重が正規確率過程の場合の対称断面を有する鋼圧縮部材に適用し，数値計算を行って，部材の耐用期間，各不規則要因等の変化に伴なう部材の最適断面積およびその時の細長比，破壊確率の変化を調べ，圧縮部材の信頼度を合理的に定める本解析法の有効性を示す。

2．信頼性理論に基づく圧縮部材の最小費用設計法

図－1に示す両端ヒンジの不規則な初期たわみを有する弾性圧縮部材に正規定常確率過程である軸圧縮力$N(t)$が準静的に作用する場合を考える。この時，一般に理想的な中心載荷が現実には存在しないと考えられるので，相対偏心量のバラツキに影響を及ぼす量として初期たわみy_{0m}の他に軸圧縮力の初期偏心量e_0も考慮しなければならない。そうすると，任意の時点tにおける最大縁応力は式(1)のようになる。ここに，$\sigma_f(t)=N(t)/A$：軸圧縮応力；A：部材の断面積；$\lambda=\ell/(\xi k_e A^{\kappa-1})$：部材の細長比；$\ell$：部材長；$\xi=r/k$：回転半径と核半径の比；$k_e$，$\kappa$：断面形状によって異なる定数；$E$：弾性係数；$\gamma_1=e_0/k$



図－1

$$\sigma_{max}(t)=\sigma_f(t)+\frac{\pi^2\sigma_f(t)E}{\pi^2E-\sigma_f(t)\lambda^2}\left(\gamma_1+\gamma_2\frac{\ell^2}{k^2}\right) \quad (1)$$

：軸圧縮力の初期偏心量の不規則性を表わす無次元量；$\gamma_2=k y_{0m}/\ell^2$：初期たわみの不規則性を表わす無次元量；$k=W/A$：核半径；W：部材の断面係数である。本研究では弾性圧縮部材を考えているので，不等式$\sigma_{max}(t)>\sigma_y$が満足することをもって破壊と考える。また，「強度の余裕」と呼ばれる新しい確率過程$Z(t)=\sigma_y-\sigma_{max}(t)$を導入すれば，

$$Z(t)=\sigma_y-\sigma_f(t)-\frac{\pi^2\sigma_f(t)E}{\pi^2E-\sigma_f(t)\lambda^2}\left(\gamma_1+\gamma_2\frac{\ell^2}{k^2}\right) \quad (2)$$

$Z(t)$は式(2)のようになる。ここに，σ_yは降伏点応力である。すなわち，部材の破壊という事象は$Z(t)$が正領域から負領域へ閾値横断することであると考えられる。$Z(t)$は時点$t=t$において不規則要因の非線形関数であるがここでは簡単のために線形近似理論を用いて式(2)を式(3)のようにする。ここに，$\bar{\sigma}_f$は$\sigma_f(t)$の期待値である。いま，軸圧縮

$$Z(t)=\sigma_y-\sigma_f(t)-\frac{\pi^2\bar{\sigma}_fE}{\pi^2E-\bar{\sigma}_f\lambda^2}\left(\gamma_1+\gamma_2\frac{\ell^2}{k^2}\right) \quad (3)$$

応力$\sigma_f(t)$の自己相関関数を$K_{\sigma_f}(\tau)=D_{\sigma_f}\exp(-\alpha\tau^2)$，（$\alpha$：正の実数）とすると，この場合の$Z(t)$が正領域から負領域へ負超過する超過確率密度$\nu_Z(0)$および最初の時点で破壊する確率$F_Z(0)$は，それぞれ次のようになる。

$$\nu_Z(0)=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{-K''_{\sigma_f}(0)}{D_{\sigma_y}+D_{\sigma_f}+\left(\frac{\pi^2\bar{\sigma}_fE}{\pi^2E-\bar{\sigma}_f\lambda^2}\right)^2\left(D_{\gamma_1}+\frac{\ell^4}{k^4}D_{\gamma_2}\right)}}\exp\left[-\frac{\bar{\sigma}_y-\bar{\sigma}_f}{2\left\{D_{\sigma_y}+D_{\sigma_f}+\left(\frac{\pi^2\bar{\sigma}_fE}{\pi^2E-\bar{\sigma}_f\lambda^2}\right)^2\left(D_{\gamma_1}+\frac{\ell^4}{k^4}D_{\gamma_2}\right)\right\}}\right] \quad (4)$$

ここに，$\Phi(\beta)=(1/\sqrt{2\pi})\int_0^{\beta}(-t^2/2)dt$；$\beta$：安全性指標；$D_{\sigma_y}$，$D_{\sigma_f}$，$D_{\gamma_1}$，$D_{\gamma_2}$はそれぞれ$\sigma_y$，$\sigma_f(t)$，$\gamma_1$，$\gamma_2$の分散である。

$$F_Z(0)=\frac{1}{2}-\Phi(\beta)=\frac{1}{2}-\Phi\left\{\frac{\bar{\sigma}_y-\bar{\sigma}_f}{\sqrt{D_{\sigma_y}+D_{\sigma_f}+\left(\frac{\pi^2\bar{\sigma}_fE}{\pi^2E-\bar{\sigma}_f\lambda^2}\right)^2\left(D_{\gamma_1}+\frac{\ell^4}{k^4}D_{\gamma_2}\right)}}\right\} \quad (5)$$

いま，圧縮部材の破壊事象，すなわち$Z(t)$の負超過の事象をポアソン分布で近似できると仮定する。また，部材は対称断面を有するものとする。部材が対称断面を有する場合には，断面の両側の縁応力が限界状態において

降伏点に達する可能性があり，これらの２つの可能性は相等しい。この場合の部材の全破壊確率Ｑは式(6)のようになる。作用荷重および部材強度が定常確率過程であれば式(6)は式(7)のようになる。

$$Q = 1 - \{1 - 2F_2(0)\}\cdot exp\left[-2\int_0^T \nu(0|t)dt\right] \quad (6)$$

$$Q = 1 - \{1 - 2F_2(0)\}\cdot exp\left[-2\nu(0)\cdot T\right] \quad (7)$$

次に，破壊による損失額の経済的評価を行うために損失額の期待値 $d\bar{C}_F = C_F\cdot\nu(0|t)$ を計算する[3]。ここに，C_Fは破壊によって生ずる損失額である。この場合さらに耐用期間の末における現在価格と複利合計金額との差を考慮するために現価係数 $\eta(t) = e^{-\epsilon t}$ を導入する[4]。ここに，$\epsilon = \ln(1+\gamma)$（γ：利率）で表わされる1/yearの次元を有する係数である。また，対称断面であることを考慮すると耐用期間Ｔにおける損失額の期待値は式(8)のようになり，作用荷重および部材強度が定常確率過程の場合は式(9)のようになる。よって，圧縮部材の全期待費用E_cは式(10)のようになる[3]。ここに，C_Iは初期建設費である。最小費用設計法の目的は，E_cが最小になるような部材の設計変数（本研究では部材断面積）を決定することである。すなわち，式(11)を満足する部材の断面積を決定することである。

$$\bar{C}_F = 2C_F\left[F_2(0) - \int_0^T \nu(0|t)\cdot e^{-\epsilon t}dt\right] \quad (8)$$

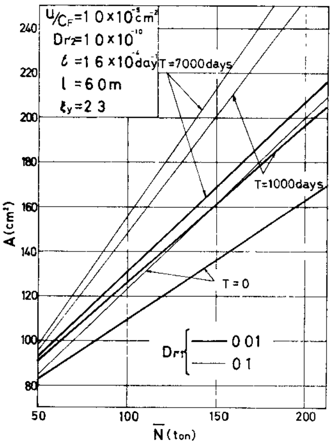
$$\bar{C}_F = 2C_F\left[F_2(0) - \nu(0)\cdot(1-e^{-\epsilon T})/\epsilon\right] \quad (9)$$

$$E_C = C_I + 2C_F\left[F_2(0) - \nu(0)\cdot(1-e^{-\epsilon T})/\epsilon\right] \quad (10)$$

$$\frac{dE_c}{dA} = \frac{d}{dA}\left(\frac{C_I}{C_F}\right) + 2\left[\frac{dF_2(0)}{dA} - \frac{d\nu(0)}{dA}\cdot\frac{1-e^{-\epsilon T}}{\epsilon}\right] = 0 \quad (11)$$

ここでは，初期建設費は $C_I = Au$ で表わされるものとする。uは単位面積当りの費用である。この関係と式(4)，式(5)を式(11)に代入するとこの場合の最適化の条件式が得られる。また，破壊確率は式(4)，式(5)を式(7)へ代入することによって得られ，細長比は $\lambda = l/(\xi k_e A^{\kappa-1})$ なる関係式に条件式から得られた最適断面積を代入することによって得られる。

<u>３．数値計算例</u>　最適化の条件式(11)を用いて数値計算を行い，耐用期間Ｔの変化に伴なって圧縮部材の最適断面積がどのように変化するか，さらに，最適断面積を有する破壊確率および細長比の変化を調べた。その一例を図－２，表－１に示す。図－２は初期偏心量の不規則性を表わすr_1の分散 $D_{r_1} = 0.01$，0.1 とした場合の $T=0$，1000，および 7000 daysにおける最適断面積の値を示したものである。縦軸に最適断面積A (cm^2)，横軸に軸圧縮力の期待値$\bar{N}$ (ton)をとっている。表－１はD_{r_1}が変化する時の最適断面積を有する破壊確率Qおよび細長比λの値を示したものである。ただし，$V_{\sigma_y}(=\sqrt{D_{\sigma_y}}/\bar{\sigma}_y) = 0.1$，$V_{\sigma_f}(=\sqrt{D_{\sigma_f}}/\bar{\sigma}_f = \sqrt{D_N}/\bar{N}) = 0.1$，$u/C_F = 1.0\times10^{-5}/cm^2$，$D_{r_2} = 1.0\times10^{-10}$，$\gamma = 0.06$ $(\epsilon = 1.6\times10^{-4}/day)$，$\alpha = 1/day^2$，$l = 6m$ とした。さらに，横断面はＨ形断面の弱軸回りについて数値計算を行ったので $k_e \doteqdot 3.3/m$，$\kappa = 2$，$\xi \doteqdot 2.3$ とした。図－２および表－１からわかるようにD_{r_1}が0.01から0.1と10倍になると最適断面積の値はＴがいずれの場合にも増加していることがわかる。さらに，最適断面積の増加の割合は$T=0$よりも$T=1000$および7000 daysの場合の方が大きい。すなわち，D_{r_1}は信頼度の経時変化を考慮した方が考慮しない方よりも最適断面積の値に大きく影響することがわかる。また，その時の破壊確率は増加し，細長比は減少していることがわかる。



図－２

表－１

$\bar{N}$(ton)	D_{r_1} / T (day)	0.01 / 0	0.01 / 1000	0.01 / 7000	0.1 / 0	0.1 / 1000	0.1 / 7000
50	A (cm^2)	82.30	90.31	92.44	85.32	95.39	98.21
	λ	96.06	87.54	85.52	92.65	82.87	80.49
	Q ($\times10^{-4}$)	0.137	0.153	0.240	0.171	0.203	0.324
100	A (cm^2)	110.46	125.31	129.23	121.91	145.32	151.85
	λ	71.57	63.09	61.17	64.84	54.40	52.06
	Q ($\times10^{-4}$)	0.228	0.283	0.459	0.364	0.471	0.765
150	A (cm^2)	135.74	159.77	166.19	160.16	200.39	211.25
	λ	58.24	49.48	47.57	49.36	39.45	37.42
	Q ($\times10^{-4}$)	0.343	0.464	0.766	0.617	0.782	1.26
200	A (cm^2)	161.58	197.02	206.41	200.85	258.16	273.20
	λ	48.92	40.12	38.30	39.36	30.62	28.94
	Q ($\times10^{-4}$)	0.489	0.679	1.12	0.885	1.08	1.73

($u/C_F = 1.0\times10^{-5}cm^{-2}$　$D_{r_2} = 1.0\times10^{-10}$　$\epsilon = 1.6\times10^{-4}day^{-1}$　$l = 6.0$ m)

1) 白木・相良・高岡：確率過程理論による構造物の最適設計法，第32回土木学会中四国支部学術講演概要，I-20，PP35-36，1980-5.

2) 高岡・白木：弾性圧縮部材の確率論的設計法，鳥取大学研究報告，第10巻，第1号，PP140-152，1979-9.

3) A.P.ルジャニーツィン著（高岡宣善訳）：構造物の信頼性解析，丸善，1980.

4) 長尾義三：土木計画序論，公共土木計画論，共立出版，1972.