組合せ荷重を受ける構造物の設計用荷重の決定法について

鳥取大学大学院　学生員　○千阪　貞昭
鳥取大学工学部　正会員　　白木　渡
鳥取大学工学部　正会員　　高岡　宣善

<u>1．まえがき</u>　構造物の安全性の評価および経済的な構造物の設計においては、材料強度や荷重の統計的性質を十分考慮する必要がある。本研究では、特に、材料強度よりもずっと大きな統計的ばらつきを有する荷重(時間領域内で変動する不規則過程と考える。)に着目し、そのような荷重の組合せ作用を確率論的に評価し、その設計用荷重の決定法を信頼性理論に基づいて明らかにした。さらに、組合せ係数の求め方についても考察した。

<u>2．組合せ荷重を受ける棒部材の設計用荷重の決定法</u>　ここでは、Fig 1 に示すような棒を考える。各区間の寸法として断面積を F_i、部材長を l_i、材料強度を w とする。また、互いに独立な2つの荷重 $q_1(t)$, $q_2(t)$ が作用しているものとし、それらの有効振動数は系の固有振動数に比べて小さく、載荷は準静的に行われるものとする。今系のパラメータ (F_i, l_i, w) を確定量とし、2つの不規則な荷重 $q_1(t), q_2(t)$ に対する設計用荷重をそれぞれ S_1, S_2 とすれば、設計用の条件式は $S_1 \leqq wF_1, S_1+S_2 \leqq wF_2$ となる。したがって、この系の信頼度関数(非破壊確率) $R(T|S)$ は式(1)のようになる[1)]。

$$R(T|S)=\mathbb{P}\{|q_1(\tau)|<S_1, |q_1(\tau)+q_2(\tau)|<S_1+S_2;\ \tau\in[0,T]\}=R_* \tag{1}$$

ここに T は耐用期間であり、R_* は規定の信頼度である。さて、作用する荷重を以下のi)およびii)のように取り扱う場合について、式(1)を用いて設計用荷重の求め方をそれぞれ示す。

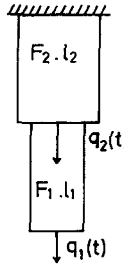

Fig. 1

<u>i) 荷重が連続不規則過程の場合</u>　荷重 $q_1(t)$ および $q_2(t)$ が正規定常過程である場合を考える。それらの期待値、分散、有効振動数をそれぞれ $\bar{q}_i, \sigma_i^2, \omega_i\ (i=1,2)$ とする。この場合、式(1)はRiceの公式を用い、さらに信頼度が十分高いとすれば規定の破壊確率 $Q_*(=1-R_*)$ を用いて次のように近似できる。

$$Q_*=\frac{\omega_1 T}{2\pi}\left\{\exp\left[-\frac{(S_1-\bar{q}_1)^2}{2\sigma_1^2}\right]+\exp\left[-\frac{(S_1+\bar{q}_1)^2}{2\sigma_1^2}\right]\right\}+\frac{\omega_{12} T}{2\pi}\left\{\exp\left[-\frac{(S_1+S_2-\bar{q}_1-\bar{q}_2)^2}{2\sigma_{12}^2}\right]+\exp\left[-\frac{(S_1+S_2+\bar{q}_1+\bar{q}_2)^2}{2\sigma_{12}^2}\right]\right\} \tag{2}$$

ここに、σ_{12}^2 および ω_{12} はそれぞれ、$q_1(t)+q_2(t)$ の分散および有効振動数である。荷重の特性値が既知であれば、規定の信頼度 R_* を与えることにより、上式(2)から設計用荷重が決定できる。荷重が、正規定常過程以外の分布形を有する場合は、設計用荷重と規定の破壊確率との関係を式(2)のような簡単な形で表わすことはできない。

<u>ii) 荷重を離散的な不規則系列と考える場合</u>　この場合、過載荷重の概念を導入する。過載荷重とは、通常のレベルを著しく超過し、構造物の安全性(破壊)に直接かかわるような荷重であり、不規則な時間区間 $\tilde{\tau}$ ごとに現れ、不規則な作用継続時間 $\tilde{\Delta}$ を有する不規則なインパルスと考える。このような過載荷重の任意の時点における生起確率は $a=\bar{\Delta}/\bar{\tau}$ と表わされる。$\bar{\Delta}$ および $\bar{\tau}$ はそれぞれ過載荷重の作用継続時間および再現期間の期待値である。また、過載荷重の生起事象＝破壊事象とすれば、期間 T における過載荷重の生起確率、すなわち破壊確率は $\nabla=a\cdot T/\bar{\Delta}$ となる[2)]。さて、上述のような概念を用い、S_1 および S_1+S_2 を過載荷重のレベルとおけば、式(1)は規定の破壊確率 Q_* を用いて式(3)のように表わされる。ここに、Q_{1*} および Q_{2*} はそれぞれ式(4), (5)のように表わされ、a_0, a_1, a_2, a_{12} は任意の時点における過載荷重の生起確率でそれぞれ $q_1(t)$ がレベル S_1、$q_1(t)$ がレベル S_1+S_2、$q_2(t)$ がレベル S_1+S_2、$q_1(t)+q_2(t)$ がレベル S_1+S_2 を超える確率である。i)と同様に、荷重の特性値および規定の破壊確率 Q_{1*}, Q_{2*} が与えられれば、式(3)から設計用荷重が決定できる。$q_1(t), q_2(t)$ が正規定常過程のときには、式(4)における a_0 および $\bar{\Delta}_0$ は q_1 の確率密度 $f(q_1)$ を用いて、式(6)のように求められる。式(6)を式(4)に代入すれば、式(4)が式(2)の第1項の正交差のみを取り扱ったものに一致す

$$Q_*=1-R_*=Q_{1*}+Q_{2*} \tag{3}$$

$$Q_{1*}=\mathbb{P}\{|q_1(\tau)|>S_1;\ \tau\in[0,T]\}=\frac{a_0\cdot T}{\bar{\Delta}_0} \tag{4}$$

$$Q_{2*}=\mathbb{P}\{|q_1(\tau)+q_2(\tau)|>S_1+S_2;\ \tau\in[0,T]\}=a_1 T/\bar{\Delta}_1+a_2\cdot T/\bar{\Delta}_2+a_{12} T/\bar{\Delta}_{12} \tag{5}$$

$$\left.\begin{aligned} a_0 &= \int_{S_1}^{\infty} f(q_1)\,dq_1 \\ \bar{\Delta}_0 &= \frac{T\int_{S_1}^{\infty} f(q_1)\,dq_1}{\frac{\omega_1 T}{2\pi}\exp\left\{\frac{(S_1-\bar{q}_1)^2}{2\sigma_1^2}\right\}} \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

る。したがって、式(5)の第1項，第2項が無視できるとし、正交差のみを考慮すると荷重を正規分布とする限りでは、式(2)は式(3)と一致する。このような方法では、正規分布以外の分布形でもその過載荷重の生起確率を比較的簡単に求められ、分布形が未知の場合でも、観測データから$\bar{\Delta}$や$\bar{\tau}$が求まれば、この方法を用いることができる。

3 組合せ係数について　構造物に作用する荷重が複数個である場合、個々の荷重が別々に作用すると考えて各荷重の値を総和すると、そのような荷重の組合せが生じる確率は非常に小さい。したがって、各荷重を総和した値というものは低減できる。ここでは、このような組合せ荷重の値を低減する係数として組合せ係数n_c ($0<n_c<1$)を考える。今、構造物の危険断面における応力が、作用する荷重$q_1, \dots, q_n$と線形関係にあると仮定すると、構造物が破壊しないためには、この応力は式(7)を満たさねばならない。ここにrは材料強度であり、b_iは構造物のパラメータに依存する係数である。また、組合せを考慮しない単一荷重作用による個々の設計用荷重$[q_i]$およびb_iが既知であるとし、設計用材料強度$[r]$を式(8)を満たすように定める。そうすると、式(7)を式(8)で除して、式(9)が得られる。ここでp_iは式(10)で与えられる。また、式(9)より$n_c \geqq \max\{p_1, \cdots, p_n\}$という条件が得られる。さて、2つの荷重$q_1$および$q_2$が作用する場合の組合せ係数$n_c$の決定公式を上述ii)の理論を適用して導くことにする。材料強度が確定量であるときには、式(9)の右辺は1と考えられ、したがって、この場合、規定の破壊確率Q_*に対して式(9)から式(11)が得られる。ここに$\nabla_1, \nabla_2, \nabla_{12}$はそれぞれ式(12), (13), (14)で与えられる。式(12)のa'は任意の時点で$\frac{p_1 q_1}{n_c[q_1]}$がレベル1を超える確率であり、また、$\bar{\Delta}'$は耐用期間T内で$\frac{p_1 q_1}{n_c[q_1]}$がレベル1を超える事象の平均継続時間である。式(13), (14)のa'', a''', $\bar{\Delta}''$, $\bar{\Delta}'''$も同様に定義される。荷重の特性値および規定の破壊確率Q_*を与えれば、式(11)を用いて組合せ係数n_cが求まる。

$$b_1 q_1 + \cdots + b_n q_n \leqq r \qquad (7)$$

$$n_c\{b_1[q_1] + \cdots + b_n[q_n]\} = [r] \qquad (8)$$

$$\frac{p_1 q_1}{n_c[q_1]} + \cdots + \frac{p_n q_n}{n_c[q_n]} \leqq \frac{r}{[r]} \qquad (9)$$

$$p_i = b_i[q_i] \Big/ (b_1[q_1] + \cdots + b_n[q_n]) \qquad (10)$$

$$Q_* = \nabla_1 + \nabla_2 + \nabla_{12} \qquad (11)$$

$$\nabla_1 = \mathbb{P}\left\{\frac{p_1 q_1}{n_c[q_1]} \geqq 1\right\} = \frac{a' \cdot T}{\bar{\Delta}'} \qquad (12)$$

$$\nabla_2 = \mathbb{P}\left\{\frac{p_2 q_2}{n_c[q_2]} \geqq 1\right\} = \frac{a'' \cdot T}{\bar{\Delta}''} \qquad (13)$$

$$\nabla_{12} = \mathbb{P}\left\{\frac{p_1 q_1}{n_c[q_1]} + \frac{p_2 q_2}{n_c[q_2]} \geqq 1\right\} = \frac{a''' \cdot T}{\bar{\Delta}'''} \qquad (14)$$

4 数値計算結果および考察　式(2)で正交差のみを考え、$\bar{q}_1 = \bar{q}_2$, $\sigma_1 = \sigma_2 = \bar{q}_1/2$, $\frac{\omega_1 T}{2\pi} = 10^5$ (T=50年)として設計用荷重$\bar{S}_1 (= S_1/\sigma_1)$, $\bar{S}_2 (= S_2/\sigma_1)$を求めた結果をFig.2に示す。設計用荷重を一義的に定めるため、最適化の手法として式(15)のようなコスト関数Cを用いる。γは単位体積当りの費用である。さらに、$F_1 = S_1/\omega$、$F_2 = (S_1+S_2)/\omega$の関係より式(15)をS_1およびS_2で表わし、無次元関数$C_* = \frac{C\omega}{\gamma l \sigma_1}$を用いると、$l_1 = l_2 = l$に対して式(15)は式(16)のようになる。

$$C = \gamma(F_1 l_1 + F_2 l_2) \qquad (15)$$

$$C_* = 2\bar{S}_1 + \bar{S}_2 \qquad (16)$$

図中の破線は式(15)を満たすC_*の値であり、実線と破線の交点が求める設計用荷重の最適解となる。また、各部材が同一の信頼度を有するという条件($Q_{1*} = Q_{2*} = Q_*/2$)を満たす設計用荷重を一点鎖線で示す。この条件より求められた値は最適解とほぼ一致しており、したがって ii)の方法でQ_{1*}, Q_{2*}の値として$Q_*/2$を与えればよい。その結果はまた、最適解とほぼ一致する。次に、正規分布に従う2つの荷重q_1, q_2が作用する場合に式(11)を用いて組合せ係数を求めた結果をTable-1に示す。ここでは荷重の特性値としてFig.2で用いた値と同じものを用い、また、$[q_1]=[q_2]$, $b_1=b_2=1$, $p_1=p_2=0.5$とした。表から明らかなように、組合せ荷重の値がかなり低減できることがわかる。また、棒部材の例でq_1, q_2が別々に作用した時の設計用荷重は、$Q_*=10^{-3}$に対してそれぞれ$[q_1]=4.09\bar{q}_1$, $[q_2]=4.03\bar{q}_1$であり、この場合の組合せ係数n_cは$[q]=4\bar{q}$として表より0.786となる。このn_cを用いた組合せ荷重値$(n_c\{[q_1]+[q_2]\})$は$6.38\bar{q}_1$となり、この値は式(2), (16)から求まる組合せ荷重値(S_1+S_2) $6.35\bar{q}_1$とほぼ一致する。

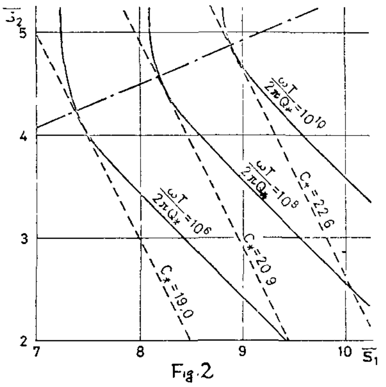

Fig.2

Table - 1 n_c

Q_* \ (q) $(\times\bar{q})$	3 50	3 75	4 00	4 25	4.50	4 75	5 00
10^{-1}	0 817	0 762	0 715	0 673	0 635	0 602	0 572
10^{-3}	0 899	0 839	0 786	0 740	0 699	0 662	0 630
10^{-6}	0 971	0 906	0 850	0 800	0 755	0 716	0 680

$\frac{\omega T}{2\pi} = 10^5$, $\bar{q}_1 = \bar{q}_2 = 2\sigma$, $(q_1) = (q_2)$

参考文献：1)チルコフ：組合せ荷重の決定法、CMPC, 1980-No 3.
2)ルジャニーツィン著，高岡宣善訳：構造物の信頼性解析．丸善，1980
3)フェドーロフ：荷重組合せ係数の決定について、CMPC, 1980-No 1.