

基準点を用いた地形の内挿

岡山大学工学部 正員 ○ 森 忠次
岡山大学工学部 正員 服部 進
姫 路 市 中坪 義明

§1. はじめ 地形, 雨量, 気温などは散在する幾つかの測定点(基準点と呼ぶことにする)を用いて, 測定していない点で内挿することが多い。これは $Z = f(X, Y)$ という2次元座標で表わされる関数の内挿問題である。この種の補間法は非常に多くあるが, 利用に際しては, Z の特徴, 基準点の分布と数, 所要精度, 手数 などの面から考察しなければならない。測定点がランダム配置とすると, 補間法はつぎのように分類できよう。(a) 単点ごとに Z を求める。(b) 格子領域の多項式曲面を一斉に求める。(c) 格子領域の多項式曲面を個別に求める。(d) 三角形領域に分割して補間する。こゝでは(c)の方法の中で, Jenkins 及び Jancaits のがよい方法を用いた結果を主として示す。

§2 J-Jの補間法 1次元関数 $Z = f(x)$ に対して, 図-1 のように x を等間隔に区切り, 区間 $i \sim i+1$ の補間関数 $f(x)$ を定める方法を示そう。まず節点 i および $i+1$ を中心として基準点に近い近似関数 $g_i(x)$, $g_{i+1}(x)$ を定める(低次多項式を用いる)。つぎに i , $i+1$ において g_i と g_{i+1} との重み付き平均として $f_i(x)$ を定める。そのための重み関数を w_i , w_{i+1} とすると,

$$f_i(x) = g_i(x) \cdot w_i(x) + g_{i+1}(x) \cdot w_{i+1}(x) \quad (1)$$

ここで, i および $i+1$ において f が連続であるための条件を, i を原点とする局所座標で表わせば,

$$w_i + w_{i+1} = 1; \quad w_i(0) = w_{i+1}(h) = 1, \quad w_i(h) + w_{i+1}(0) = 0 \quad (2)$$

さらに, f' が連続であるためには,

$$w_i'(0) = w_i'(h) = w_{i+1}'(0) = w_{i+1}'(h) = 0 \quad (3)$$

$$\text{式(2)を満足する解: } w_i(\xi) = 1 - \xi/h, \quad w_{i+1}(\xi) = \xi/h \quad (4)$$

$$\text{式(2), (3)を満足する解: } w_i(\xi) = 1 - (\xi/h)^2(3 - 2\xi/h), \quad w_{i+1}(\xi) = (\xi/h)^2(3 - 2\xi/h) \quad (5)$$

2次元関数 $Z = f(x, y)$ に対しては, 図-2 における点(1, 2, 3, 4)の格子

領域内の補間関数は, それぞれの格子点を中心とする4格子領域の近似関数 g_i ($i=1, 2, 3, 4$) を用いて,

$f = g_1 w_1 + g_2 w_2 + g_3 w_3 + g_4 w_4$ と表わす。このときの w_i は局所座標を用いて次式で表わされる。

$$w_i(\xi, \eta) = w_i(\xi) \cdot w_i(\eta) \quad (6)$$

§3 1次元関数における補間

原地形が $z = \frac{1}{2} \sin(2\pi\lambda/x)$ という正弦曲線とする。地形測量では, 選択的に測定点を選ぶことが多いため,

(a) 最高・最低点のみを測定したとき, (b) それ以外に斜面中点をも測定したとき について補間精度を調べた結果を示そう。この場合に測定点は誤差が1%と仮定し, g は $i+1$ 点を通る低次多項式を用い, w は式(4)

および式(5)を用い, 節点は $x=0$ より求めた。なお, 節点間隔は $h = \lambda \sim 2\lambda/8$ にわたって変化させて計算した。図-3(次ページ)は誤差 $= \int (f - Z)^2 dx / \int dx$ を示す。この図よりつぎのことがわかる。

1. 最高・最低点以外に中間点を測定すれば精度が

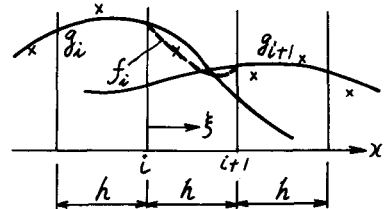


図-1

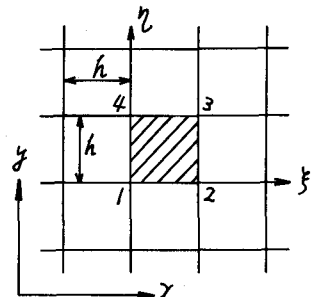


図-2

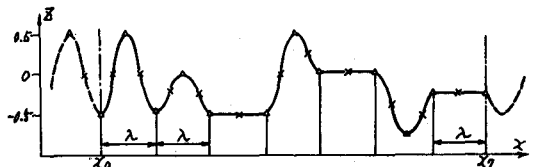


図4 正弦曲線と水平線

よくある。2. λ を $\lambda/3$ 以下にすれば精度がよい。3. λ は高次にするほど精度がよくなるには限らない。4. λ を高次にしても精度はほとんど変わらない。

つぎに図-4(前ページ)に同じようなことを行なった結果、 λ に4次式を用いたときに、節点間隔が小さければ、かえって誤差が大きくなる。

図-5は実線と
(a) λ と最小二乗法
による2次の
近似(点線)、(b) λ と
3点を結ぶ2次式
と1次と、(c)
基準点と結ぶスプ
ライン関数と1次
との比較である。

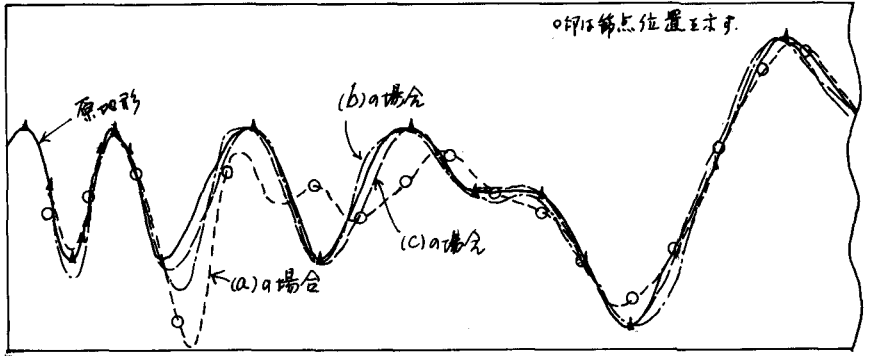
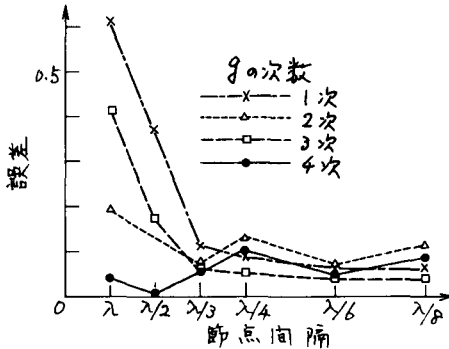


図-5 3種の方法による地形の補間

§4 2次元図表における補間

1:2,500 地形図(図-6)を用いて補間した例を図-7に示す。計算条件等は前表時に示す。



(a) 最大、最小値のみに基準点を配置

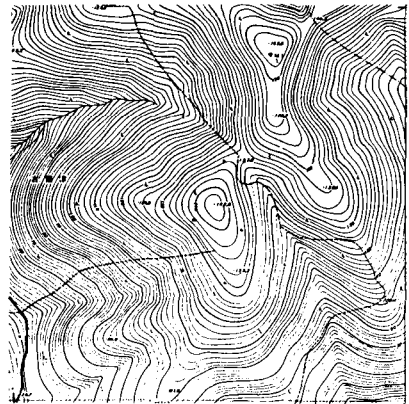
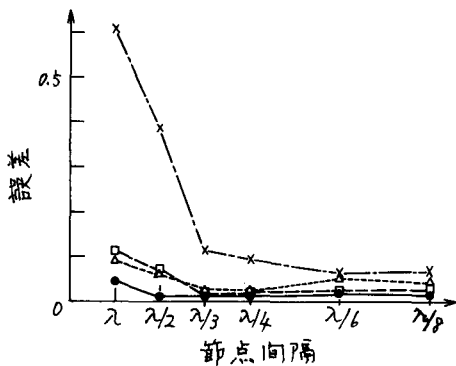


図-6 1:2,500 地形図



(b) 最大、最小、中間点に基準点を配置

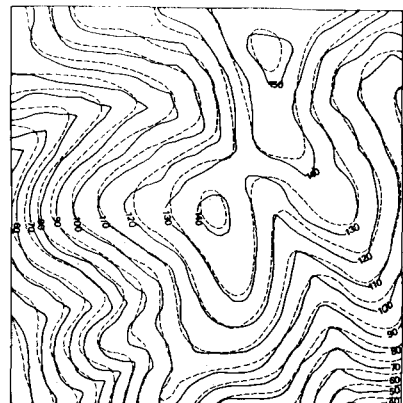


図-7 原等高線補間と等高線(破線)の比較