

鳥取大学 正員 木山英郎
鳥取大学 正員 藤村 尚
鳥取大学(院生) 学員 ○森木 悟

1 はじめに

地下浅所にトンネルを掘削すれば、その直上の地盤に沈下を生ずる。これに関連した弾性解析としては、水平地表面に近接した掘削された円形トンネル周りの応力が、安藤(1937)やMindlin(1939)によって計算されている。ともに、Jeffery(1921)の双極座標での応力関数を重力場に適用したものである。伊藤(1951)によってなされた傾斜地表面下の円形トンネル周辺の応力解析もその応用といえる。このように応力場は種々検討されているが、変位状態に関するこの種の解析はまだ見当たらない。

そこで、上記 Mindlin の応力解析の手法に習って、平面ひずみ下の 2 次元弾性地盤内の変位解析を行なうことにした。なお、双極座標の応力関数に対応する変位関数の一般解は上記 Jeffery によって示されているのでそれを参考にした。

2 解析の基礎

2.1 地盤内の初期応力状態の仮定：トンネル掘削以前の水平地盤内の応力状態について、Fig.1 に示す Mindlin の仮定した 2 つの典型的なモデルについて解析する。

重力による物体力ポテンシャルを Ω 、地盤の単位容積重量を w とおけば、上記 2 例とも Ω は式(1)で与えられる。一方、直角座標で表わした応力関数 χ はそれぞれ式(2)、(3)で与えられる。

$$(1) \quad \Omega = -wy \quad (\text{Case I, II})$$

$$(2) \quad \chi_1 = 0 \quad (\text{Case I})$$

$$(3) \quad \chi_2 = Smwy^3 \quad S = \frac{1-2\nu}{6(1-\nu)} \quad (\text{Case II})$$

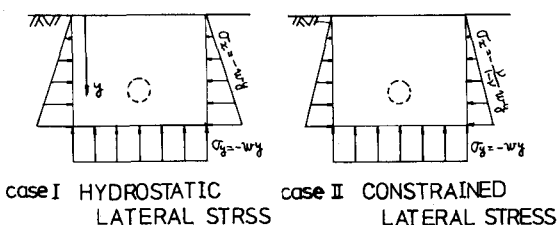


Fig.1 初期応力状態

2.2 双極座標の応力関数：地表面と円形トンネル

を境界線とする双極座標 (α, β) を用いる (Fig.2 参照)。

この双極座標において、トンネル壁面は $\alpha = \alpha_1 = \text{const.}$ 、地表面は $\alpha = \alpha_0 = 0$ と表わされ、トンネル中心位置は $(x=0, y=a \coth \alpha_1)$ 、およびトンネル半径は $R = a \operatorname{cosech} \alpha_1$ となる。

Jeffery は応力関数 χ の基礎式として式(4)を導き、その一般解を示している (ただし、重力ポテンシャル Ω は考えない)。

$$(4) \quad \left(\frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} + 2 \frac{\partial^2}{\partial \alpha \partial \beta} + \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} - 2 \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} + 2 \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} + 1 \right) \left(\frac{\chi}{r^2} \right) = 0$$

応力成分 $\sigma_\alpha, \sigma_\beta, \tau_{\alpha\beta}$ はこの χ と Ω から式(5)で求められる。

$$(5) \quad \begin{cases} \sigma_\alpha = \{ (\cosh \alpha - \cosh \beta) \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} - \sinh \alpha \frac{\partial^2}{\partial \alpha} - \sinh \beta \frac{\partial^2}{\partial \beta} + \cosh \alpha \} \left(\frac{\chi}{r^2} \right) + a \Omega \\ \sigma_\beta = \{ (\cosh \alpha - \cosh \beta) \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} - \sinh \alpha \frac{\partial^2}{\partial \alpha} - \sinh \beta \frac{\partial^2}{\partial \beta} + \cosh \beta \} \left(\frac{\chi}{r^2} \right) + a \Omega \\ \tau_{\alpha\beta} = -(\cosh \alpha - \cosh \beta) \frac{\partial^2}{\partial \alpha \partial \beta} \left(\frac{\chi}{r^2} \right) \end{cases}$$

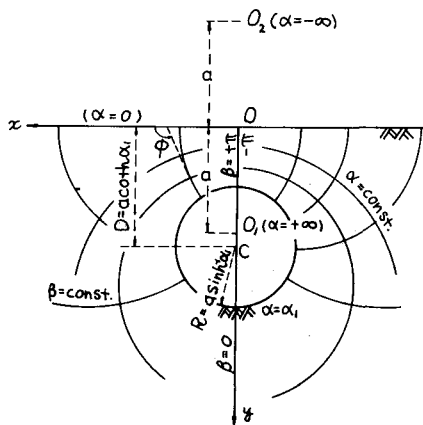


Fig.2 双極座標

2.3. 双極座標の変位成分: Jefferyによって示されたように, 双極座標においては, 変位拡大率 $\gamma = f(\alpha) + f(\beta)$ の形になることから, 直角座標におけると同様な簡便な式(6)で応力関数 χ から変位関数 Q を求めることができる。

$$(6) \quad \gamma = \iint \left(\frac{\partial^2 \chi}{\partial \alpha^2} - \frac{\partial^2 \chi}{\partial \beta^2} - 1 \right) \left(\frac{\partial \gamma}{\partial \alpha} \right) d\alpha d\beta$$

ただし, この解 γ は式(7)を満足する必要がある。

$$(7) \quad \left(\frac{\partial^2 \chi}{\partial \alpha^2} - \frac{\partial^2 \chi}{\partial \beta^2} - 1 \right) \left(\frac{\partial \gamma}{\partial \alpha} \right) + 4 \frac{\partial^2 \chi}{\partial \alpha \partial \beta} \left(\frac{\partial \gamma}{\partial \beta} \right) = 0$$

このとき, 変位成分は式(8)から計算される。

$$(8) \quad \begin{cases} E u_{\alpha} = (1+\nu) \left\{ (1-2\nu) \frac{\partial \chi}{\partial \alpha} - (1-\nu) \frac{\partial Q}{\partial \beta} \right\} \\ E u_{\beta} = (1+\nu) \left\{ (1-2\nu) \frac{\partial \chi}{\partial \beta} + (1-\nu) \frac{\partial Q}{\partial \alpha} \right\} \end{cases}$$

3 応力関数と変位関数の解

3.1 Case I ($\chi_1 = 0$ の場合): 応力関数 χ (Mindlinの解の一部修正), 変位関数 Q は次のようである。

$$(9) \quad \chi = k_0 \left[\sin \beta + k_1 \alpha \sinh \alpha + k_2 \alpha (\cosh \alpha - \cos \beta) + k_3 (\cosh 2\alpha - 1) \cos \beta + k_4 \sinh 2\alpha \cos \beta \right. \\ \left. + \sum_{n=2}^{\infty} [L_n \{ \cosh(n+1)\alpha - \cosh(n-1)\alpha \} + M_n \{ (n-1) \sinh(n+1)\alpha - (n+1) \sinh(n-1)\alpha \}] \cos n\beta \right]$$

$$(10) \quad Q = 2k_0 \left[\sin \beta \ln(\cosh \alpha - \cos \beta) + k_1 \beta \sinh \alpha + k_2 \beta (\cosh \alpha - \cos \beta) + k_3 \sinh 2\alpha \sin \beta \right. \\ \left. + k_4 \cosh 2\alpha \sin \beta + \sum_{n=2}^{\infty} [L_n \{ \sinh(n+1)\alpha - \sinh(n-1)\alpha \} + M_n \{ (n-1) \cosh(n+1)\alpha \right. \\ \left. - (n+1) \cosh(n-1)\alpha \}] \sin n\beta \right]$$

$$(11) \quad \begin{cases} k_0 = -\frac{1}{2} w a^2 \operatorname{cosech}^2 \alpha_1 & k_1 = -\frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} & k_2 = \frac{5-6\nu}{2(1-\nu)} \coth \alpha_1 & k_3 = -\frac{3-4\nu}{4(1-\nu)} \\ k_4 = \frac{1}{2} \left\{ \frac{5-6\nu}{2(1-\nu)} \coth \alpha_1 - 1 \right\} & L_n = \frac{e^{n\alpha_1} \sinh \alpha_1 (\sinh n \alpha_1 \cosh \alpha_1 - n \cosh n \alpha_1 \sinh \alpha_1)}{\sinh^2 n \alpha_1 - n^2 \sinh^2 \alpha_1} \\ M_n = \frac{e^{-n\alpha_1} \sinh 2\alpha_1 \sinh n \alpha_1}{\sinh^2 n \alpha_1 - n^2 \sinh^2 \alpha_1} \end{cases}$$

ただし, 基礎式(6),(7)では重力ポテンシャル Ω が考慮されていないので, 式(10)にも Ω の影響が入っていない。別途考慮する必要がある。

3.2 Case II ($\chi_2 = S w y^3$ の場合): 上述の解(Case I)に χ_2 に対応する解を重ね合わせることで, χ_2 に対応する応力関数 χ , 変位関数 Q は以下に与えられる。

$$(12) \quad \chi' = k'_0 \left[\frac{\sinh^2 \alpha}{(\cosh \alpha - \cos \beta)^2} + k'_1 \alpha (\cosh \alpha - \cos \beta) + k'_2 (\cosh 2\alpha - 1) \cos \beta + k'_3 \sinh 2\alpha \cos \beta \right. \\ \left. + \sum_{n=2}^{\infty} [L'_n \{ \cosh(n+1)\alpha - \cosh(n-1)\alpha \} + M'_n \{ (n-1) \sinh(n+1)\alpha - (n+1) \sinh(n-1)\alpha \}] \cos n\beta \right]$$

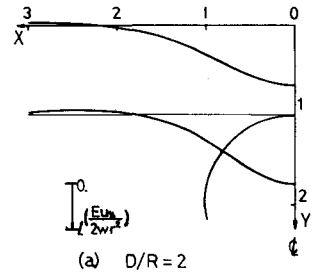
$$(13) \quad Q' = 2k'_0 \left[F(\alpha, \beta) + k'_1 \beta (\cosh \alpha - \cos \beta) + k'_2 \sinh 2\alpha \sin \beta + k'_3 \cosh 2\alpha \sin \beta \right. \\ \left. + \sum_{n=2}^{\infty} [L'_n \{ \sinh(n+1)\alpha - \sinh(n-1)\alpha \} + M'_n \{ (n-1) \cosh(n+1)\alpha - (n+1) \cosh(n-1)\alpha \}] \sin n\beta \right]$$

$$(14) \quad \begin{cases} k'_0 = S w a^2 & k'_1 = 3 \coth \alpha_1 \operatorname{cosech}^2 \alpha_1 & k'_2 = -\frac{3}{2} \operatorname{cosech}^2 \alpha_1 & k'_3 = \frac{3}{2} \coth \alpha_1 \operatorname{cosech}^2 \alpha_1 \\ L'_n = \frac{n(n^2-1) \sinh^2 \alpha_1}{\sinh^2 n \alpha_1 - n^2 \sinh^2 \alpha_1} & M'_n = \frac{n \sinh n \alpha_1 (n \sinh \alpha_1 \cosh \alpha_1 + e^{-n\alpha_1} \sinh n \alpha_1)}{\sinh^2 n \alpha_1 - n^2 \sinh^2 \alpha_1} \end{cases}$$

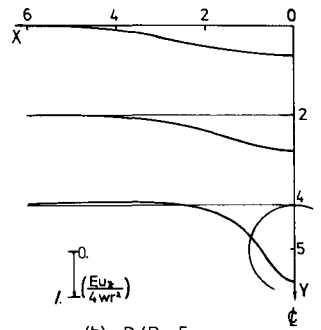
ただし, χ' と Q' を合わせたものが与えられた初期応力状態Case Iを表わし, それに対応する変位は直角座標を用いて容易に計算できる。こうして求める変位はトンネル開削以前の地盤状態を表わすので, 本解析では計算する必要がない(したがって, 式(13)の $F(\alpha, \beta)$ は不用である)。

4 解析例

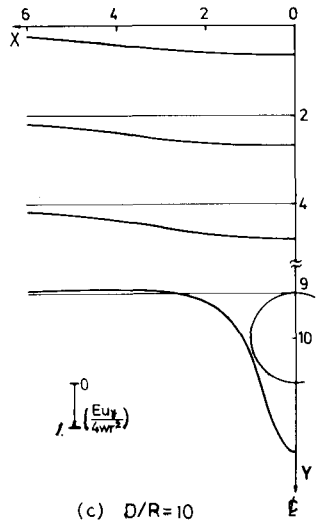
Case IIに対する変位解析結果の一例はFig.3(a),(b),(c)に示す。



(a) $D/R=2$



(b) $D/R=5$



(c) $D/R=10$

Fig.3 各トンネル深さに対する
地盤下量 ($\nu=0.25$)