浮遊砂の移流拡散式の簡易解法とその検討

正員　杉尾　捨三郎
同　岡部　健士
○学生員　石川　元一

1.まえがき　非平衡時の浮遊砂の移流拡散方程式を解く解析手法として、解析理論が比較的単純で、計算手法としても自由度がある差分法がしばしば利用され、その結果が数多く紹介されてきた。[1)2)] しかし、この手法は、数学的信頼性は高いが、その計算労力は、多大なものである。そこで著者らは、多小精度が劣っても、計算がより単純で取り扱い易い解法の開発を試みた、本報告では、解析理論を説明するとともに、その有用性を検討するために行った2，3の計算例を紹介する。

2.解析理論　浮遊砂濃度の基礎式は、(1)式のように書かれる。

$$u\frac{\partial c}{\partial x} = \varepsilon\frac{\partial^2 c}{\partial z^2} + w_0\frac{\partial c}{\partial z} \qquad (1)$$

ここに、x・zは、それぞれ流下方向・鉛直方向の座標であり、uは流下方向の流速、w_0は代表沈降速度とし、そして、εは断面平均拡散係数とする。(1)式の水面条件・路床条件は、次のように書かれる。

水面条件；　$z=h$　$\varepsilon\frac{\partial c}{\partial z} + w_0 c = 0$　(2)，路床条件；　$z=0$　$\varepsilon\frac{\partial c}{\partial z} + w_0 C_e = 0$　(3)

ここに、hは水深であり、C_eは、断面の代表的水理量によって決定される平衡時の路床濃度である。なお、路床の境界条件は、拡散係数と濃度勾配で表わされるfluxが代表的水理量によって規定されるという考え[3)]に基いて設定されている。(1)～(3)を$x=0$で$C=C(0,z)$という初期条件のもとで解けば、非平衡時の流れに沿う濃度変化を算定することができる。

(1)式をzに関して一回積分し、(3)式を考慮すれば、次式が得られる。

$$\varepsilon\frac{\partial c}{\partial z} + w_0 C = \int_0^z u\frac{\partial c}{\partial x}dz + w_0(C_e - C_0) \qquad (4)$$

ここに、C_0は$z=0$における濃度である。(4)式において$z=h$とし、(2)式を考慮すれば、次式が得られる。

$$0 = \int_0^h u\cdot\frac{\partial c}{\partial x}dz + w_0(C_e - C_0) \qquad (5)$$

(4)～(5)式より水面および路床条件を満たす方程式を導くと、次式のようになる。

$$\varepsilon\frac{\partial c}{\partial z} + w_0 C = w_0(C_e - C_0)\cdot\left\{1 - \left(\int_0^z u\frac{\partial c}{\partial x}dz\right)\Big/\left(\int_0^h u\frac{\partial c}{\partial x}dz\right)\right\} \qquad (6)$$

さて、(6)式の右辺の積分は解が得られてはじめて実行し得るものであるが、これを適当な、第1近似解により概算し、この概算値を(6)式に代入してこれを解けば、より近似度の高い第2の近似解が得られるものと思われる。著者らは、$z=0$のとき路床条件を満足する第1近似解、$C=C_0\exp[-C_e w_0 z/(C_0\varepsilon)]$　(7)　を考え、次式を得た。

$$\varepsilon\frac{\partial c}{\partial z} + w_0 C = w_0(C_0 - C_e)\cdot\left\{\exp\left[-\frac{C_e}{C_0}\cdot\frac{w_0}{\varepsilon}\cdot z\right] - \exp\left[-\frac{C_e}{C_0}\cdot\frac{w_0}{\varepsilon}\cdot h\right]\right\}\Big/\left\{1 - \exp\left[-\frac{C_e}{C_0}\cdot\frac{w_0}{\varepsilon}\cdot h\right]\right\} \qquad (8)$$

(8)式を$z=0$で$C=C_0$となる条件で解くと、(9)式が得られる。

$$C = C_0\left\{\exp\left[-\frac{C_e}{C_0}\cdot\frac{w_0}{\varepsilon}\cdot z\right] - \exp\left[-\frac{C_e}{C_0}\cdot\frac{w_0}{\varepsilon}\cdot h\right] + \frac{C_e}{C_0}\cdot\exp\left[-\frac{C_e}{C_0}\cdot\frac{w_0}{\varepsilon}\cdot h\right]\cdot\left(1 - \exp\left[-\frac{w_0}{\varepsilon}z\right]\right)\right\}\Big/\left(1 - \exp\left[-\frac{C_e}{C_0}\cdot\frac{w_0}{\varepsilon}\cdot h\right]\right) \qquad (9)$$

上式は、$C_0=C_e$のときは、$C=C_e\exp[-w_0 z/\varepsilon]$となり、平衡状態の濃度分布を与える。また、$C_0\neq C_e$のときは、$C_e/C_0$によって規定される非平衡な濃度分布を与える。以下同様なくり返しを行うと、第3、4…と順次高次の近似解が得られるであろう。しかし、第3近似解以上は、数式が極めて複雑になり、計算の実行が複雑

になるので、ここでは、一応第2近似解をある程度信頼できるものとして、今なお未知のC_oを求めるための基礎式を導くことにしよう。

漸変流の水面形計算理論におけるのと同様に、u，h，ε，C_eは、局所的には、流れ方向に変化せず一定とみなし、(9)式に(5)式を代入し、整理した。

$$\frac{dC_o}{dx}=\frac{-(w_o\cdot C_o/q)\cdot(1-C_e/C_o)\cdot(\exp[-C_e\beta/C_o]-1)^2}{\frac{2}{\beta}\cdot\frac{C_o}{C_e}\cdot(\exp[\frac{C_e}{C_o}\cdot\beta]-1)^2+(1-\exp[-\frac{C_e}{C_o}\cdot\beta])+\frac{C_e}{C_o}\{-\beta+\frac{C_e}{C_o}(\beta+\exp[-\beta]-1)\}\cdot\exp[\frac{C_e}{C_o}\beta]} \tag{10}$$

ここに、$\beta=w_oh/\varepsilon$，$q=vh$ とする。(10)式は、C_oに関する常微分方程式であるが、解析解を導くことは不可能であるので、C_oの計算は逐次計算法によることになるが、その労力は原式を差分法で解く場合に比して、はるかに小さくなるであろう。また、もしh，ε，C_eなどがxの関数で漸変するならば、その個々の値を逐次変化させれば、前述したのと同様に、C_oは順次計算していくことができる。

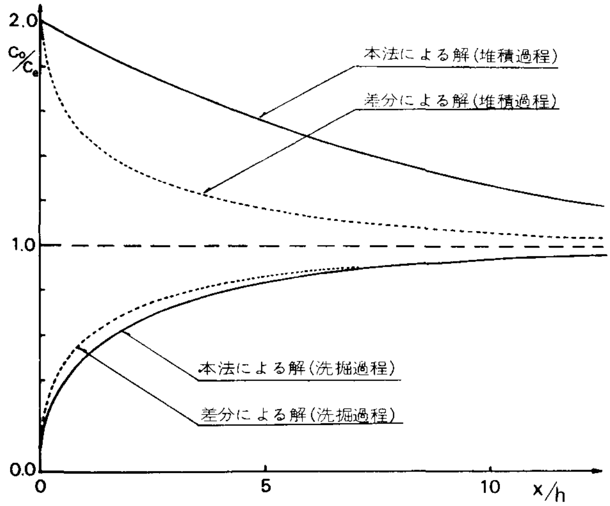
3.計算例　以上において説明した簡易解法の有用性を検討するために、本法による解と差分法によるものとを直接比較してみよう。計算用モデルとしては、等流において浮遊砂濃度が流下とともに漸減および漸増するという現象を採用する。図－1は、2次元等流中のある断面($x=0$)の濃度分布がC_eをその流れの平衡路床濃度として

$$C=2C_e\exp[w_oz/\varepsilon]\qquad(\text{堆積過程})\tag{11}$$

$$C=0.1C_e\exp[w_oz/\varepsilon]\qquad(\text{洗掘過程})\tag{12}$$

のように与えられたときに、路床濃度の計算値C_oが流下とともにいかに変化するかを図示したものである。この場合、初期条件によらず流速係数ϕは10、摩擦速度u_*で無次元化させた沈降速度W_o(=w_o/u_*)は0.5とし、$\varepsilon=u_*h/15$としている。簡易解は、(10)式を前進差分形式に解き直したのち、流下方向のステップ間隔ΔxをC_oの変化に応じて$\Delta x/h=0.005\sim0.1$と変化させながら卓上計算器(YHP Model 97)により求められた。一方、差分解は、(1)式をz方向には中央差分で、x方向には前進差分で離散化したのち、$\Delta x/h=0.05$，$\Delta z/h=0.01$(Δz＝z方向のメッシュ間隔)としてFACOM 230により求められた。

図－1をみれば、洗掘過程に対する簡易解と差分解は比較的近いものとなっており、このような濃度発達過程の解析には前者が有用であることがわかる。しかし、洗掘過程においては、両者はかなり大きく離れ、本報で報告した簡易解法によるものが差分解に比して著しく過小の濃度変化を呈している。これは、堆積過程を計算するために与えた初期濃度分布(11)式と(9)式との$x=0$における不連続度が大きすぎるためであって、本簡易法の運用上注意を要する点である。



図－1　簡易解と差分解との比較

〔参考文献〕

1)土屋・星畑・仲道；浮遊砂運動のシミュレーション，第24回年講，II－85，昭45.

2) Kerssens & Rijn ; Model for Suspended Sediment Transport, Proc. of ASCE, Vol.105, HY5, 1979.

3)芦田　；浮遊砂による河床変動について，京大防災研年報，第13号B，昭45.