

管路系における非定常流れの解析法について(3)

広島大学工学部 正員 常松 芳昭

1. まえがき

水の効率的使用という観点から、管路送配水系においては適切な流量管理が要請される。管路系における非定常流れの挙動の解明はこの種の問題の技術的基礎を与えるものであるが、一般に、その解析は煩雑である。そこで、これまでにマトリックスとベクトルによる統一的な解析法を提示したが^{1)~3)}、えられた状態方程式は非線形であり、その理論解を求めることはできない。しかし、ある特定の流量の近くでは、非線形抵抗則を近似的に線形化することができるので、本報告では新たに状態方程式の線形化方程式を導き、その一般解を示すとともに、トリ構造の管路系のインパルス応答についても考察を行った。

2. 系の状態方程式の線形化方程式と一般解

管路系はトリ構造から成り、これは1個のソース・ノードと m 個のシンク・ノードおよび n 本の枝をもつトリグラフで表わされるとする。これに循環流を与える枝を付加して得られるところのすべてのノードにおいて流量の保存方程式が成り立つネットワークに対しては、次のエネルギー方程式と連続方程式が系の状態方程式を構成する。但し、節点と枝の番号付けならびに記号法はこれまでの報告にしたがうものとする。

$$\text{エネルギー式} : B_{T1}(m, n) L(n, n) \dot{q}_T(n) = -H_{C1}(m) - B_{T1}(m, n) K(n, n) |q_T(n)| q_T(n) \quad (1)$$

$$\text{連続式} : S_T(m, m) \dot{\varphi}_3(m) = q_{T2}(m) - C(m, m) f(\varphi_3(m)) \quad (2)$$

式(1)および(2)は非線形方程式であるため、その解析解を求めることは困難である。しかし、状態変量の微小変動量に関して、その一般解が得られるならば、これに基づいて上記の状態方程式の有する解の特性を知ることが可能である。以下、式(1)および(2)の線形近似化とその一般解を求める手法について述べる。

まず、ある特定の平衡点における量には*印を、それからの微小変動量には Δ をそれぞれ付与することにすれば、式(1)における非線形抵抗項は、Taylor展開を行い微小量の2次以上の項を省略すると

$$\begin{aligned} H_{C1}(n) &= K(n, n) |q_T(n, n)| q_T(n) \\ &\approx 2 K(n, n) |q_T^*(n, n)| q_T(n) - K(n, n) |q_T^*(n, n)| q_T^*(n) \end{aligned} \quad (3)$$

で近似される。式(3)を式(1)に代入し、 $q_T = q_T^* + \Delta q_T$ 、 $H_{C1} = H_{C1}^* + \Delta H_{C1}$ の関係を考慮すれば

$$B_{T1}(m, n) L(n, n) \Delta \dot{q}_T(n) = -\Delta H_{C1}(m) - 2 B_{T1}(m, n) K(n, n) |q_T^*(n, n)| \Delta q_T(n) \quad (4)$$

ここで、節点における流量保存の式より得られる

$$\Delta q_T(n) = \begin{pmatrix} -A_{T21}^{-1}(n-m, n-m) A_{T22}(n-m, m) \\ E(m, m) \end{pmatrix} \Delta q_{T2}(m) \quad (5)$$

を式(4)に適用し、 $\Delta H_{C1} = \Delta \varphi_3$ の関係が成立することに注意すれば、結局次式が得られる。

$$\Delta \dot{q}_{T2}(m) + L^{-1}(m, m) K^*(m, m) \Delta q_{T2}(m) + L^{-1}(m, m) \Delta \varphi_3(m) = 0(m) \quad (6)$$

ここに、

$$L = B_{T1} L \begin{pmatrix} -A_{T21}^{-1} A_{T22} \\ E \end{pmatrix}, \quad K^* = 2 B_{T1} K |q_T^*| \begin{pmatrix} -A_{T21}^{-1} A_{T22} \\ E \end{pmatrix} \quad (7)$$

である。つぎに、式(2)に含まれる関数 $f(\varphi_3)$ をTaylor展開し、 $\Delta \varphi_3$ の2次以上の項を省略すれば

$$f(\varphi_3(m)) \approx f(\varphi_3^*(m)) + F'(\varphi_3^*(m, m)) \Delta \varphi_3(m) \quad (8)$$

ここに、 $F'(\varphi_3^*(m, m))$ は $f(\varphi_3)$ を φ_3 で微分し、特定の値 φ_3^* を代入したものを対角成分においた対角行列である。

式(8)を式(2)に代入し、整理すると、 $\Delta \varphi_3$ に関する常微分方程式が次のように得られる。

$$\Delta \dot{\varphi}_3(m) + S_T^{-1}(m, m) C(m, m) F'(\varphi_3^*(m, m)) \Delta \varphi_3(m) - S_T^{-1}(m, m) \Delta q_{T2}(m) = 0(m) \quad (9)$$

式(6)および(9)はそれぞれ系の状態方程式(1)および(2)の微小変動量に関する線形化方程式であり、 $2m$ 個の連立常

微分方程式系を構成している。ここで、 Δq_{T2} および $\Delta \varpi_3$ は常微分方程式論より次のように仮定される。

$$\Delta q_{T2}(m) = U(m) e^{\lambda t}, \quad \Delta \varpi_3(m) = V(m) e^{\lambda t} \quad (10)$$

ここに、 U, V は定数列ベクトルである。式(10)を式(6)および(9)に適用すれば

$$\left. \begin{aligned} (\lambda E + L^{-1} K^*) U + L^{-1} V &= 0 \\ -S_T^{-1} U + (\lambda E + S_T^{-1} C F') V &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

式(11)において、 U, V がともに 0 以外の有意な解をもつためには、明らかに次の式が成立しなければならない。

$$\begin{vmatrix} \lambda E + L^{-1} K^* & L^{-1} \\ -S_T^{-1} & \lambda E + S_T^{-1} C F' \end{vmatrix} = 0 \quad (12)$$

上式は λ の $2m$ 次の多項式であるから、その根を $\lambda = \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{2m}$ とすると、 $\lambda = \lambda_s$ に対して定数列ベクトル U, V が定められることになるので

$$U(m) = \mu_s \alpha^{(s)}(m), \quad V(m) = \mu_s \beta^{(s)}(m) \quad (13)$$

が書かれる。ここに、 $\{\alpha^{(s)}\}, \{\beta^{(s)}\}$ は $\lambda = \lambda_s$ に対する式(11)の解ベクトルであり、係数 μ_s は初期条件によって定められる定数である。したがって、微小変動量 $\Delta q_{T2}(m), \Delta \varpi_3(m)$ の一般解は次のように表わされる。

$$\Delta q_{T2} = \mu_1 \alpha^{(1)} e^{\lambda_1 t} + \mu_2 \alpha^{(2)} e^{\lambda_2 t} + \dots + \mu_{2m} \alpha^{(2m)} e^{\lambda_{2m} t} \quad (14)$$

$$\Delta \varpi_3 = \mu_1 \beta^{(1)} e^{\lambda_1 t} + \mu_2 \beta^{(2)} e^{\lambda_2 t} + \dots + \mu_{2m} \beta^{(2m)} e^{\lambda_{2m} t} \quad (15)$$

3. 数値計算例

対象とした管水路系のグラフは図-1、系の諸元は表-1 のようである。図-2、3 は、末端水槽からの取り出し流量はオリフィスによって制御されているとし、 $\Delta \varpi_5 / \varpi_5^* = -0.1$ 、つまり、末端水槽 5 においてのみ 10% のインパルス状の水位低下が生じた場合の計算結果を示したものである。これらの図より、トリ-構造の管水路系では、末端水槽水位に瞬間的な微小変動が生起しても、その影響は系全体に波及するが、時間の経過とともに最終的には消滅し、系の状態は平衡点に収束することが知られる。すなわち、こうした系は安定であることが分る。

しかし、図-3 において、 $\Delta q_5 \sim \Delta q_7$ の変動にはいわゆるオーバーシュートの発生がみられ、管路内流量は必ずしも単調な減衰を示さず、複雑な減衰振動の性状を呈している。このような各種の応答の生起条件等は今後の検討課題としたい。

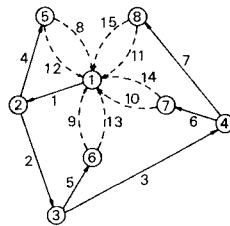


図-1 システム・グラフ

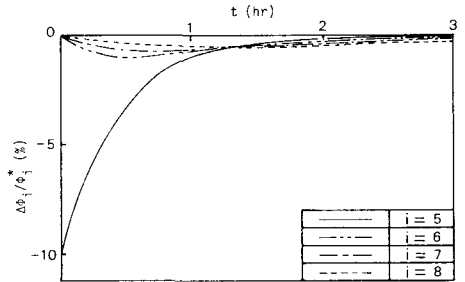


図-2 末端水槽水位の応答

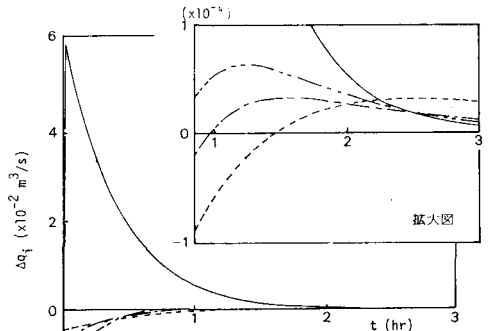


図-3 Δq_{T2} の応答

表-1 管水路系の諸元

branch No.	1	2	3	4	5	6	7
pipe length(m)	500.00	500.00	500.00	232.69	224.17	235.29	318.75
pipe diameter(m)	0.5	0.5	0.5	0.3	0.3	0.3	0.3
node No.	5	6	7	8	f=0.03 C=0.62 $\phi_1=50.0$ m		
cross-sectional area of surge-tank(m ²)	30.0	30.0	30.0	50.0			
elevation of orifice(m)	30.0	20.0	10.0	0.0			
area of orifice opening(m ²)	0.01	0.01	0.01	0.01			