確率過程論による構造物の最適設計法

鳥取大学工学部　正会員　○白木　渡
宮崎県庁　相良一久
鳥取大学工学部　正会員　高岡宣善

1．まえがき　作用荷重および部材強度が時間に関して不規則に変動する確率過程とした場合の構造物の最適設計法に関する研究を確率過程論を用いて行った。解析モデルとしては，任意の部材のいずれかが破壊しても構造系の破壊につながる“weakest-link”モデル・タイプの静定構造物に時間に関して不規則に変動する荷重が準静的に作用する場合を考え，まず構造物の初期建設費および耐用期間中に起りうる破壊によって引き起される損失額の総和を最小にするような各部材の最適設計変数（ここでは最適断面積）を求める最小費用設計法を示した。つぎに，その方法を各部材強度が正規確率変数，作用荷重が正規確率過程の場合の13部材からなる静定トラスに適用し，数値計算を行って，構造物の耐用期間の増加にともなう部材の最適断面積ならびにその最適断面を有する場合の各部材および構造物全体の破壊確率の変化を調べた。

2．確率過程論に基づく静定構造物の最小費用設計法　与えられた条件を満し，かつ構造物の期待費用（初期建設費と破壊によって生ずる損失額の総和の期待値）を最小にするような設計変数を求める設計法が構造物の最小費用設計法である。ここでは，作用荷重および部材強度が確率過程である場合の多部材要素からなる静定構造物の最小費用設計法について考える。まず，部材強度$R(t)$および作用荷重$S(t)$がともに確率過程である場合の単一部材の破壊を考える。いま，$Z(t)=R(t)-S(t)$とすると，部材の破壊は$Z(t)$が正領域から負領域へ閾値横断することであると考えられる。$Z(t)$の正領域から負領域への超過をポアソン分布で近似できるとすると，この場合の部材の全破壊確率$P_f(t)$は次式で表わされる[1]。

$$P_f(t)=1-\{1-F_Z(0)\}\exp\left[-\int_0^t p(0|t)\,dt\right] \tag{1}$$

ここに，$F_Z(0)$は最初の時点$t=0$における$Z(0)$の分布関数$F_Z(z)$において$z=0$を代入したもので，部材が最初から破壊する確率を表わす。また，$p(0|t)$は$Z(t)$が$Z(t)=0$の限界レベルを正領域から負領域へ超過するときの超過確率の時間密度である。荷重$S(t)$および強度$R(t)$がいずれも定常確率過程であれば，$p(0|t)$は定数となり式(1)は，次式のようになる。

$$P_f(t)=1-\{1-F_Z(0)\}\exp\left[-p(0)\cdot t\right] \tag{2}$$

さて，つぎに破壊による損失額の経済的評価を行うために，時点tから$t+dt$の間に起りうる破壊によって生ずる損失額の期待値$d\bar{C}_F=C_F\cdot p(0|t)$を計算する。ここに，$C_F$は破壊によって生ずる損失額である。この場合，さらに長期間にわたる損害を避けたいということを考慮するため，損害除去係数[2] $\eta(t)=e^{-\varepsilon t}$を導入する。ここに，$\varepsilon$は$\varepsilon=\ln(1+y)$（$y$：固定資本に対する相対的蓄積量）で表わされる1/yearの次元を有する係数である。損害除去係数$\eta(t)$を考慮すると，耐用期間Tにおける損失額の期待値は式(3)のようになる。$S(t)$および$R(t)$が定常過程の場合には式(3)はさらに式(4)のようになる。

$$\bar{C}_F=C_F\left[F_Z(0)+\int_0^T p(0|t)\cdot e^{-\varepsilon t}dt\right] \tag{3}$$

$$\bar{C}_F=C_F\left[F_Z(0)+\frac{p(0)}{\varepsilon}(1-e^{-\varepsilon T})\right] \tag{4}$$

いま，構造物の建設費が材料費だけからなり，静定構造物の各部材の破壊事象の間に相関性がなく，しかも各部材の破壊確率が小さい値の場合には，静定構造物の破壊確率はすべての部材の破壊確率の総計によって安全側に近似することができるので[3]，耐用期間TにおけるN部材要素からなる静定構造物の期待費用E_Cは次式で近似できる。

$$E_C=\sum_{i=1}^{N}\left[C_{Ii}+C_F\left\{F_Z(0)_i+\frac{1}{\varepsilon}p(0)_i(1-e^{-\varepsilon T})\right\}\right] \tag{5}$$

ここに，C_{Ii}：i番目部材の初期建設費；C_F：構造物の破壊によって生ずる損失額；$F_Z(0)$：i番目部材の最初の時点$T=0$における破壊確率；$p(0)_i$：i番目部材の超過確率の時間密度である。上式(5)のN個の項は互いに独立であるので，静定構造物の期待費用E_Cの最小化は各部材の期待費用E_{Ci}の最小化がなされれば実現する。ここで，E_{Ci}をC_Fで除して次式のように無次元化しておく。

$$\hat{E}_{Ci}=E_{Ci}/C_F=C_{Ii}/C_F+\left[F_Z(0)_i+\frac{1}{\varepsilon}p(0)_i(1-e^{-\varepsilon T})\right] \tag{6}$$

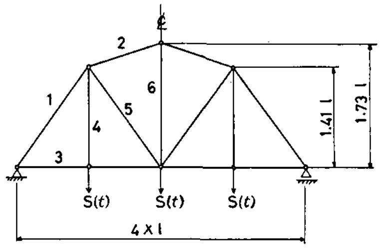
目的は，$\hat{E}_{ci}$ $(i=1\sim N)$ が最小になるような各部材の設計変数（本研究では部材断面積）を決定することである。すなわち，

$$\frac{d\hat{E}_{ci}}{dA_i}=\frac{d}{dA_i}\left(\frac{C_{Ii}}{C_F}\right)+\frac{dF_Z(0)_i}{dA_i}+\frac{dp(0)_i}{dA_i}\cdot\frac{(1-e^{-\varepsilon T})}{\varepsilon}=0 \quad (i=1\sim N) \qquad (7)$$

なる関係式を満足する部材の断面積 A_i $(i=1\sim N)$ を決定することである。

以上示したN部材要素からなる静定構造物の最小費用設計法を図－1に示す静定トラス構造物[4]に適用する。トラスの各部材強度 R は材料の降伏点強度とし，時間に無関係な正規確率変数であるとする。そして，荷重 $S(t)$ は正規定確率過程で準静的に作用しているものとする。図中の数字は各部材の部材番号を表わす。トラスの形状および作用荷重の載荷の対称性により，左半分の部材のみを考える。荷重 $S(t)$ は準静的に作用しているので，簡単な構造解析より各部材の部材力は $S_i(t)=M_iS(t)$ $(i=1\sim 6)$ となる。ここに，M_i は荷重乗数で $M_1=1.841$，$M_2=1.217$，$M_3=1.067$，$M_4=1.000$，$M_5=0.159$，$M_6=0.741$ である。そうすると，各部材の強度の余裕 $Z_i(t)$ $(i=1\sim 6)$ は $Z_i(t)=R-M_iS(t)/A_i$ $(i=1\sim 6)$ となる。ここに，A_i $(i=1\sim 6)$ は各部材の断面積である。いま，荷重 $S(t)$ の自己相関関数を $K_S(\tau)=D_S\exp(-\alpha\tau^2)$ （α：正の実数；D_S：荷重の分散）とすると，この場合の各部材の超過確率密度 $p(0)_i$ $(i=1\sim 6)$ および最初の時点で破壊する確率 $F_Z(0)_i$ $(i=1\sim 6)$ は，それぞれ次式のように表わされる。

$$p(0)_i=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{2\alpha\frac{M_i^2}{A_i^2}D_S}{D_r+\frac{M_i^2}{A_i^2}D_S}}\exp\left\{-\frac{(\bar{r}-\frac{M_i}{A_i}\bar{s})^2}{2(D_r+\frac{M_i^2}{A_i^2}D_S)}\right\},\quad F_Z(0)_i=\frac{1}{2}-\Phi(\beta_i) \qquad (8)$$



図－1

ここに，D_r：強度 R の分散；$\bar{r}$：強度 R の期待値；$\bar{s}$：荷重 $S(t)$ の期待値；$\Phi(\beta_i)=(1/\sqrt{2\pi})\int_0^{\beta_i}(-\frac{t^2}{2})dt$；$\beta_i$：$i$ 番目部材の安全性指標で，$\beta_i=(\bar{r}-M_i\bar{s}/A_i)/\sqrt{D_r+M_i^2D_S/A_i^2}$ で表わされる。式(8)を式(2)に代入すると耐用期間 T におけるこの場合の各部材の破壊確率が得られる。また，部材の単位断面積当りの費用を u とすると，i 番目部材の初期費用は $C_{Ii}=A_iu$ となる。この関係と式(8)を式(7)に代入すると，この場合の最適化の式が次のように得られる。

$$\frac{u}{C_F}+\frac{\bar{s}D_rM_i/A_i^2+\bar{r}D_SM_i^2/A_i^3}{(D_r+D_SM_i^2/A_i^2)^{3/2}}\left\{-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{1}{2}\beta_i^2\right)\right\}+\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{2\alpha D_SM_i^2/A_i^2}{D_r+D_SM_i^2/A_i^2}}\exp\left\{-\frac{(\bar{r}-\bar{s}M_i/A_i)^2}{2(D_r+D_SM_i^2/A_i^2)}\right\}$$

$$\times\left\{\frac{-D_r/A_i}{D_r+D_SM_i^2/A_i^2}+\frac{(\bar{s}^2M_i^2/A_i^3-\bar{r}\bar{s}M_i^2/A_i^2)(D_r+D_SM_i^2/A_i^2)-(D_SM_i^2/A_i^3)(\bar{r}-\bar{s}M_i/A_i)^2}{(D_r+D_SM_i^2/A_i^2)^2}\right\}\left(\frac{1-e^{-\varepsilon T}}{\varepsilon}\right)=0 \qquad (9)$$

上式(9)において，$T=0$ とおくと Mau と Sexsmith[4]の式に一致する。

3．数値計算例

式(9)を用いて数値計算を行い，耐用期間 T の増加にともなって部材の最適断面積がどのように変化するかを調べた。その一例を表-1に示す。表-1は $u/C_F=10^{-3},10^{-4},10^{-5}$ とした場合の $T=0$ および $T=1000$ days における図-1に示すトラスの各部材の最適断面積の値（単位は cm^2）を示したものである。ただし，$\bar{r}=276\times10^6\,N/m^2$，$\bar{s}=89.5\,N$，$V_r(=\sqrt{D_r}/\bar{r})=0.15$，$V_S(=\sqrt{D_S}/\bar{s})=0.15$，$\gamma=0.08$，$\alpha=1/day^2$ とした。表-1からわかるように，$T=1000$ days の場合の最適断面積の値は $T=0$ すなわち従来の静的信頼性理論に基づく場合の値よりもかなり大きい。また，u/C_F が小さくなるにつれて最適断面積が若干増加している。

表－1

U / C$_F$	1.0 × 10^{-3}		1.0 × 10^{-4}		1.0 × 10^{-5}	
M_i ＼ T	0	1000 days	0	1000 days	0	1000 days
1.841	14.15	24.54	16.91	31.15	20.34	41.07
1.217	9.67	17.20	11.56	21.89	13.93	29.01
1.067	8.55	15.39	10.27	19.59	12.35	26.00
1.000	8.05	14.57	9.66	18.55	11.62	24.64
0.159	1.48	3.39	1.78	4.32	2.17	5.80
0.741	6.11	11.37	7.31	14.46	8.95	19.26
TOTAL/2	48.01	86.46	57.49	109.96	69.36	145.78

1）高岡宣善：構造物の設計・安全性・信頼性，土木学会誌，第61巻3号，pp.33－41，1976-3.

2）A.P. Ржаницын：Теория Расчета Строительных Конструкций на Надежность，Москва Стройиздат，1978.

3）白木渡・高岡宣善：確率過程論による静定構造物の信頼性解析，土木学会論文報告集，No.258，pp.23－33，1977-2.

4）S. Mau and R.G. Sexsmith：Minimum Expected Cost Optmization, Jour. of Struct. Div., ASCE, Vol.98, No.ST9, pp.2043-2058, 1972-9.