

不規則荷重によるはりの静的応答

鳥取大学工学部 正会員 ○高岡宣善
鳥取大学工学部 正会員 白木 渡
鳥取大学大学院 学生員 松保重之

1. まえがき 不規則荷重がはりに作用する場合の静的応答を2次元までのモーメントを用いて評価し、同時にこれらの結果を用いて信頼性解析を行った。解析例としては、1つの集中不規則荷重が作用する場合と分布不規則荷重が作用する場合を考えた。

2. 1つの集中不規則荷重が作用する場合のはりの静的応答および信頼性 はりに単独走行車両が載荷した場合を想定して、載荷位置、大きさがともに不規則で、それぞれ g, P で表わされる1つの集中荷重が単独はりに作用する場合を考える。そうすると、応答量は $R(x, \xi) = g(x, \xi)$ として表わせる。ただし、 $g(x, \xi)$ は点 g に単位荷重が作用した場合の x 断面の応答を表わす影響関数である。この時 g と ξ が互いに非相関であるならば、応答の確率密度 $f_R(R)$ は2次元不規則変数の分布法則より求められ式(1)となる。ただし、 $f_g(g)$ 、 $f_P(P)$ はそれぞれ不規則変数 g, P の確率密度である。応答の確率密度が求められれば、応答の平均 $\bar{R}$ 、分散 D_R および破壊確率 Q は式(2)(3)のように求められる。式(3)において積分の下限 R_a は、許容応答量である。具体例としてスパン L の単純ばりを考え、スパン中央の曲げモーメントを評価することにする。まず、影響関数 g は載荷位置 g の関数(図-1参照)だから、 $f_g(g)$ を g の確率密度 $f_R(R)$ によって表わしてみよう。 $g(\frac{L}{2}, t)$ の分布関数 $P_g(g)$ は、 g の分布関数 $P_R(R)$ を用いて表わすと、 $P_g(g) = P_R(g) - P_R(g-L) - P_R(g-L-t) - P_R(g-L+t)$ となるので、影響関数の確率密度 $f_g(g)$ は次式のように表わすことができる。

$$f_g(g) = \frac{d}{dg} P_g(g) = \frac{f_R(g)}{\left| \frac{dg}{dt} \right|_{t=\frac{L}{2}}} + \frac{f_R(L-t)}{\left| \left| \frac{dg}{dt} \right|_{t=\frac{L}{2}} \right|} = 2 \{ f_R(t) + f_R(L-t) \} \quad (4)$$

したがって、もし載荷点 g がスパン L で一様分布するとすれば、式(4)(5)より曲げモーメントの確率密度 $f_R(R)$ は式(5)となる。さらに荷重の大きさが正規分布に従うとすれば、最終的に曲げモーメントの平均 $\bar{M}$ と分散 D_M が式(2)(5)により式(6)として得られ、破壊確率 Q も許容(設計用)曲げモーメント M_{comp} が与えられると、式(7)のように得られる。式(6)(7)において、 $\bar{P}$ 、 σ_P は荷重 P の期待値と標準偏差である。

3. 分布不規則荷重が作用する場合のはりの静的応答および信頼性 載荷車両は、上に述べてきたような単独走行車両ばかりではなく、車群を形成した場合もある。さらに、はりを設計するという前提のもとでは、一番の危険状態であり発着時を考慮すべきであることを考えると、荷重が空間的に連続分布しているとみなすことができる。このことは、特に同車線がある橋において言えることである。そこで、図-2のようにスパン L の単純ばりに分布不規則荷重 $q(x)$ が作用している時の静的応答について考える。この場合、はりの曲げモーメント $\bar{M}(x)$ と $q(x)$ との間には、式(8)に示すような関係式が成

$$f_R(R) = \int_{-\infty}^{\infty} f_g(g) f_P(P) \left| \frac{\partial g}{\partial R} \right| dP = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f_g(g) f_P(P)}{P} dP \quad (1)$$

$$\bar{R} = \int_0^{\infty} R f_R(R) dR, \quad D_R = \int_0^{\infty} R^2 f_R(R) dR - \bar{R}^2 \quad (2)$$

$$Q = \int_{R_a}^{\infty} f_R(R) dR \quad (3)$$

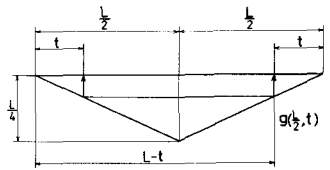


図-1

$$f_R(R) = \frac{4}{L} \int_{\frac{L}{4L}}^{\infty} f_P(P) \frac{dP}{P} \quad (5)$$

$$\left. \begin{aligned} \bar{M} &= \frac{4}{\sqrt{2\pi} \sigma_P L} \int_0^{\infty} \int_{\frac{L}{4L}}^{\infty} \frac{M}{P} \exp \left\{ -\frac{(P-\bar{P})^2}{2\sigma_P^2} \right\} dP dM \\ D_M &= \frac{4}{\sqrt{2\pi} \sigma_P L} \int_0^{\infty} \int_{\frac{L}{4L}}^{\infty} \frac{(M-\bar{M})^2}{P^2} \exp \left\{ -\frac{(P-\bar{P})^2}{2\sigma_P^2} \right\} dP dM \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

$$Q = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma_P} \int_{\frac{4M_{comp}}{L}}^{\infty} \left(1 - \frac{4M_{comp}}{LP} \right) \exp \left\{ -\frac{(P-\bar{P})^2}{2\sigma_P^2} \right\} dP dM \quad (7)$$

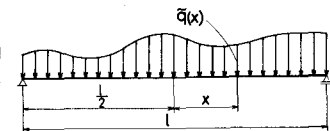


図-2

立する。この微分関係式は線型性を有するので不規則関数論により、曲げモーメントの相関関数 $K_M(x_1, x_2)$ と荷重の相関関数 $K_g(x_1, x_2)$ との間に式(9)なる関係式が成立する。したがって、 $K_g(x_1, x_2)$ が与えられれば、はりの両端における曲げモーメントは 0 だから両端断面における曲げモーメントと他断面における曲げモーメントとは相関がないという境界条件式(10)のもとに式(9)を解けば、曲げモーメントの相関関数 $K_M(x_1, x_2)$ が得られる。いま、荷重 $g(x)$ は定常不規則関数で、その相関関数を x 座標値の差 u によって $K_g(x_1, x_2) = K_g(u) = D_g e^{-\alpha|u|}$ のように書けると仮定する。ただし、 D_g は荷重の分散であり、はりの全長にわたって定数である。そうすると、微分方程式(9)を解くことによって $K_M(x_1, x_2)$ を次式のように得る。

$$K_M(x_1, x_2) = \frac{D_g}{\alpha^2} \left[e^{\frac{\alpha}{2}(x_1 - x_2)} - \alpha x_1 x_2 - \alpha x_1 x_2 + \frac{4x_1 x_2}{\ell^2} \frac{d^2}{d^2} - 2 \frac{x_1 x_2}{\ell} \frac{d}{d} + \alpha^2 (x_1^2 + x_2^2) \left(\frac{x_1}{3\ell} - \frac{\ell}{4} \right) + x_1 x_2 \left(\frac{2x_1}{\ell} + \frac{\alpha}{6} \right) + \frac{\alpha^2}{24} \frac{d^2}{d^2} - \frac{\alpha}{2} e^{-\alpha|x_1 - x_2|} + \frac{\alpha}{6} |x_1 - x_2| + \alpha |x_1 - x_2| \right] \quad (11)$$

上式より曲げモーメントは x を助変数とする非定常不規則関数となることが分る。以上のようにして静的応答が求められれば、以下のようにして与えられたレベル $M_0(x)$ を超過する破壊確率を求めることができる。いま、 $\bar{M}_0(x) = \bar{M}(x) - M_0(x)$ で定義される新たな不規則関数を導入すると、破壊という事象は $\bar{M}_0(x)$ がレベル 0 を正超過することであると考えられる。特に $\bar{M}_0(x)$ が非定常な正規分布に従う場合、 $\bar{M}_0(x)$ と $\bar{M}_0(x) = d\bar{M}_0(x)/dx$ の結合確率密度 $p(\bar{M}_0, \bar{M}_0'; x)$ は、式(12)のようになるので、単位時間当りの平均超過回数 $\nu_0(x)$ は、

$$p(\bar{M}_0, \bar{M}_0'; x) = \frac{1}{2\pi\sigma_{\bar{M}_0}\sigma_{\bar{M}_0'}\sqrt{1-\rho^2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2(1-\rho^2)} \left[\frac{(\bar{M}_0 - \bar{M}_0')^2}{\sigma_{\bar{M}_0}^2} - \frac{2\rho(\bar{M}_0 - \bar{M}_0')(\bar{M}_0' - \bar{M}_0')}{\sigma_{\bar{M}_0}\sigma_{\bar{M}_0'}} + \frac{(\bar{M}_0' - \bar{M}_0')^2}{\sigma_{\bar{M}_0'}^2} \right] \right\} \quad (12)$$

$$\nu_0(x) = \int_0^\infty p(\bar{M}_0, \bar{M}_0'; x) \bar{M}_0' d\bar{M}_0' = \frac{\sigma_{\bar{M}_0}}{2\pi\sigma_{\bar{M}_0}} \exp \left(-\frac{\bar{M}_0^2}{2\sigma_{\bar{M}_0}^2} \right) \left(\sqrt{1-\rho^2} \exp \left[-\frac{1}{2(1-\rho^2)} \left(\frac{\bar{M}_0}{\sigma_{\bar{M}_0}} - \frac{\rho\bar{M}_0'}{\sigma_{\bar{M}_0'}} \right)^2 \right] + \sqrt{2\pi} \left(\frac{\bar{M}_0}{\sigma_{\bar{M}_0}} - \frac{\rho\bar{M}_0'}{\sigma_{\bar{M}_0'}} \right) \left[1 - \Phi \left(-\frac{1}{\sqrt{1-\rho^2}} \left(\frac{\bar{M}_0}{\sigma_{\bar{M}_0}} - \frac{\rho\bar{M}_0'}{\sigma_{\bar{M}_0'}} \right) \right] \right) \right) \quad (13)$$

となる。式(12)(13)において、 $\bar{M}_0(x), \sigma_{\bar{M}_0}(x)$ は $\bar{M}_0(x)$ の期待値および標準偏差であり、また $\bar{M}_0(x), \sigma_{\bar{M}_0}(x)$ は $\bar{M}_0(x)$ の期待値および標準偏差である。さらに、 ρ は同一断面における $\bar{M}_0(x)$ と $\bar{M}_0(x)$ との間の相関係数であり、 $\Phi(u) = (1/\sqrt{2\pi}) \int_0^u \exp(-t^2/2) dt$ は確率積分である。はりが安全であるためには、レベル $M_0(x)$ は $\bar{M}(x)$ に比べてかなり大きいものでなければならぬ。そのような場合には $\bar{M}_0(x)$ が正領域へ超過する事象はまれであるので、 $\bar{M}_0(x)$ の正超過回数はポアソン分布で近似でき、破壊確率 Q は式(14)より求まる。

$$Q = 1 - \exp \left\{ -\int_{-\frac{\ell}{2}}^{\frac{\ell}{2}} \nu_0(x) dx \right\} \quad (14)$$

4. 数値計算例 以上示した諸式を用いて数値計算を行った。その一例を図-3, 4に示す。図-3は式(7)を用いて、荷重の大きさの平均を一定値 1.2α にして変動係数を V を変化させた場合の安全率 β と破壊確率 Q の関係を計算した結果を示したものである。また荷重の大きさの平均値および変動係数を一定(それぞれ 1.2α と 0.65) にして安全率を変化させた場合の設計用曲げモーメント M_{comp} とスパン長 L との関係を図-4に示す。ここに安全率とは $M_{comp}/\bar{M}$ を示すものとする。図-3を見れば、安全率が大きくなると破壊確率が小さくなり、また同一安全率でも荷重の変動係数が大きくなれば、破壊確率が大きくなることがわかる。さらに図-4を見れば、同一安全率に対しては設計用曲げモーメントはスパン長に比例して増加することがわかる。

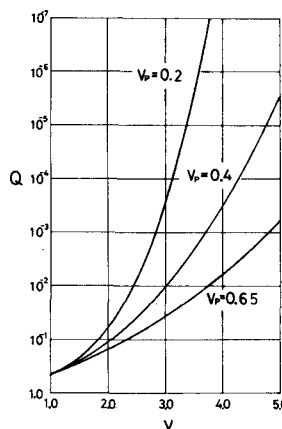


図-3

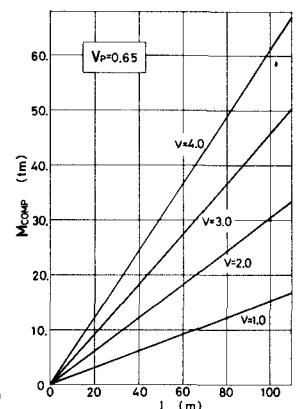


図-4

- 1) Ржаницын А. Р.: Теория расчета строительных конструкций на надежность. Стройиздат, Москва, 1978.
- 2) Болотин В. В.: Применение методов теории вероятностей и теории надежности в расчетах сооружений. Стройиздат, Москва, 1971.