片持ち梁形式鋼箱桁のマトリックス構造解析

鳥取大学大学院　学生員　○藤井洋宣
鳥取大学工学部　　　　　須田健司
鳥取大学工学部　正　員　神部俊一

1．まえがき　本研究は，従来より利用されている一般化座標法にマトリックス構造解析の手法を導入したものである。そして，さらに，本来，変形法に属するこの方法に，応力法的な手法を導入することにより，一般化断面力，一般化変位などの基本量に対して，閉じた形の解析解を求めた[1]。昨今，橋梁工事において，張出し工法が頻繁に用いられているが，今回は，それに類似した片持梁形式の多室断面箱桁に対して，せん断遅れ現象，横断面形状の変形，さらには剛な隔壁の影響を考慮に入れ，実際にモデルを設定し，その静力学的な挙動を解析した。

2．基礎方程式　桁軸方向に z 座標，横断面輪郭線方向に s 座標，さらに両者に直交する方向に n 座標を設定する。面外，面内に関する一般化座標 $\varphi_i(s)$ ($i=1,\cdots,m$), $\psi_k(s)$ ($k=1,\cdots,n$)，一般化変位 $U_i(z)$, $V_k(z)$，一般化断面力 $M_i(z)$, $Q_k(z)$ を要素とする列ベクトルをそれぞれ，Φ，Ψ，U，V，M，Q とする。また，一般化座標で構成される断面定数 a_{ij}，b_{ij}，c_{ik}，r_{kl}[2] を成分とする行列を，それぞれ，A，B，C，R とする。以上の列ベクトル，行列を使って，1)構成方程式，2)平衡方程式，3)境界条件式は以下のように与えられる。

1)　構成方程式：　$M = EAU'$　，　$Q = G({}^tCU + RV')$　　(1)1,2

ここに，$(\cdots)' = d(\cdots)/dz$ 。E，G は，それぞれ，ヤング係数とせん断弾性係数である。

2)　平衡方程式：　$Q' + Q^* = 0$　，　$GHU - M' + CR^{-1}Q - M^* = 0$　　(2)1,2

ここに，H は $H = B - CR^{-1}{}^tC$ で定義される正値半定符号の対称行列であり，M^* は z 軸方向の，Q^* は s 軸と n 軸方向の荷重項を意味する列ベクトルである[1]。

3)　自然境界条件式：

$$
{}^t(M - M_e^*)\,\delta U\big|_{z=z_1} = 0\ ,\quad {}^t(Q - Q_e^*)\,\delta V\big|_{z=z_1} = 0
$$
$$
{}^t(M - M_e^*)\,\delta U\big|_{z=z_2} = 0\ ,\quad {}^t(Q - Q_e^*)\,\delta V\big|_{z=z_2} = 0 \qquad (3)
$$

ここに，添字 e は桁端部における値であることを意味する。(3)式より，片持梁の境界条件は次のようになる。

固定端 $z=0$：　$V=0$，$U=0$　，自由端 $z=\ell$：　$M=0$，$Q=0$　　(4)

(1)1,2 式，(2)1,2 式より，M に関する二階の微分方程式が次のように得られる。

$$
M'' - \gamma^{-1}HA^{-1}M + CR^{-1}Q^* + M^{*\prime} = 0 \qquad (5)
$$

3．片持形式梁の基本量の解析解の誘導　まず，等分布荷重満載（i.e. $Q^* = \mathrm{const.}$, $M^* = 0$）について解法の概略を述べる。$Hx = \lambda^2 Ax$ なる一般固有値問題を考え，そのAに関して正規化されたモーダルマトリックス X と，$\Lambda_m^2 = \mathrm{diag}(\lambda_j^2)$ なる対角行列を使用すれば，(4)式は，対角化され，次式のようになる[1]。

$$
E_m\tilde{M}'' - \Omega_m^2\tilde{M} + \tilde{Q}^* = 0 \qquad (6)
$$

ここに，$\Omega_m^2 = \gamma^{-1}\Lambda_m^2 = \mathrm{diag}(\omega_j^2)$，$\tilde{Q}^* = {}^t\hat{X}Q^*$，$\hat{X} = R^{-1}{}^tCX$，$E_m$ は m 次の単位行列，$\tilde{M} = A^{-1}X^{-1}M$ である。(6)式は対角化されているので，$\tilde{M}_j$ ($j=1,\cdots,m$) に関する微分方程式は別個に，ラプラス変換で，次式のように解くことができる。

$\omega_j = 0$ のとき　$\tilde{M}_j(z) = \tilde{M}_j(0) + z\tilde{M}_j'(0) - \frac{1}{2}\tilde{Q}_j^* z^2$　　(7)1

$\omega_j \neq 0$ のとき　$\tilde{M}_j(z) = \tilde{M}_j(0)\cosh\omega_j z + \tilde{M}_j'(0)\frac{1}{\omega_j}\sinh\omega_j z + \tilde{Q}_j^*\frac{1}{\omega_j^2}(1-\cosh\omega_j z)$　　(7)2

この式に，境界条件 $M_j(\ell) = 0$ を適用すれば，$\tilde{M}(0)$ の項を消去することができる。(2)1式から得られる $Q(0) = \ell Q^*$ なる関係式と境界条件 $U(0)=0$ を(2)2式に適用すれば $\tilde{M}'(0)$ が求まる。それを(7)1,2式の $\tilde{M}(0)$ に代入すれば，$\tilde{M}$ に対する解を完全に求めることができる。次に，(1)1式より，$EU' = X\tilde{M}$ となるので，境界条件 $U(0)=0$ を考慮して，これを積分すれば，U の解析解が得られる。

$$
EU(z) = X\int_0^z \tilde{M}(z)\,dz \qquad (8)
$$

(2)$_2$式と $Q(\ell)=0$ より，Qは次式で与えられる。

$$Q(z) = (\ell - z)Q^{*} \qquad (9)$$

またVについては(1)$_2$式をzについて積分し，境界条件 $V(0)=0$ を考慮すれば，次式で与えられる。

$$EV(z) = \gamma R^{-1}\int_0^z Q(z)\,dz - R^{-1}\,{}^{t}C\int_0^z EU(z)\,dz \qquad (10)$$

$z = a$ の位置に線荷重 P^* が作用した場合の解析解もデルタ関数，$\delta(z-a)$ を使って，$Q^* = P^*\delta(z-a)$ とおくことにより，同様の手順で求めることができる。なお，実際の計算においては，数値計算上の精度の劣化を防ぐために，以上の式の無次元化したものを使用した。

4. 隔壁の解析　箱桁にP個の隔壁をそう入すると隔壁の縁と箱桁の薄板要素の間に，せん断応力 τ_k $(k=1,\cdots,P)$ が生じる。そのせん断応力 τ_k は，$X_k = \int_F \tau_k \psi_k \, dF$ なる一般化断面力を導入することによって，箱桁に作用する不静定量として取り扱うことができる。ここに ψ_k は，一般化座標 ψ_k の中で，横断面のゆがみに関係する一般化座標である。隔壁を剛なものであるとし，与えられた荷重のもとで，不静定量 X_j を使って，弾性方程式をたてれば，次式のようになる。

$$\delta_{k0} + \sum_g \delta_{kg} X_g = 0 \qquad (k, g = 1, \cdots, P) \qquad (11)$$

ここで δ_{kg} は，$X_g = 1$ が作用した時の箱桁の第k断面におけるゆがみを表わしていて，δ_{k0} は，与えられた荷重下における箱桁の第k断面のゆがみである。(11)式を解くことにより，容易に不静定量 X_k の値を求めることができる。これをあらためて，箱桁に作用する線荷重として，与えられた荷重と重ね合せることにより，隔壁を考慮した箱桁の解析を行った。

5. 数値計算例　桁長30mの2室片持梁形式箱桁を解析モデルとした。解析は隔壁の個数と位置によって，次の4つのCaseに分けて行った。

Case I：隔壁を全くそう入しないもの。

Case II：自由端のみ隔壁を1つだけそう入したもの。

Case III：15mおきに2つの隔壁をそう入したもの。

Case IV：10mおきに3つの隔壁をそう入したもの。

ここに示した図は，いずれも等分布荷重満載のときの結果であり，Fig.1，Fig.2 は Case I，Case IV の梁の固定端における垂直応力度分布を示したものであり，Fig.3 は，ゆがみに関連する一般化断面力 M_2 を無次元化した $\bar{M}_2$ の桁軸方向の変化を示している。

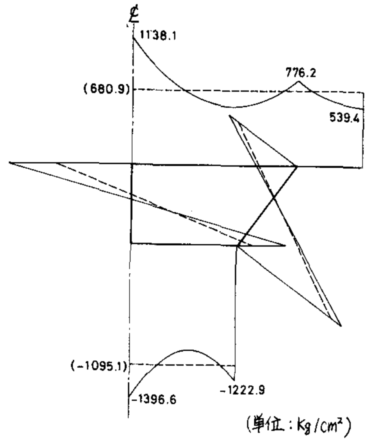

Fig.1 固定端垂直応力度分布　(Case I)

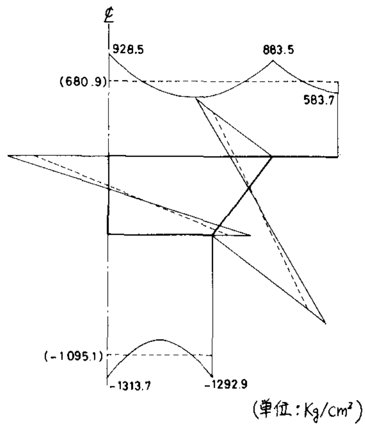

Fig.2 固定端垂直応力度分布（Case IV）

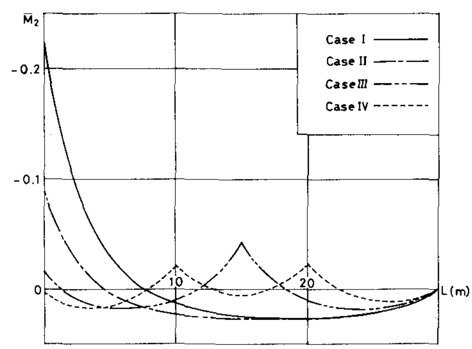

Fig.3 $\bar{M}_2$の桁軸方向変化

参考文献

1)神部，藤井：一般化座標法による直線薄肉箱桁の一解析法，土木学会第34回年次学術講演会講演概要集，第1部，I-102，1979-10

2) Vlasov. V. Z 著（奥村敏恵　外訳）：薄肉弾性梁の理論，技報堂，1967