

Multilayer Sandwich Plates の大たねみ解析

雙機大學 正員 見沢繁光 正員。大賀水田生
徳山高専 正員 重松恒美 正員 原 隆

1. 基本式

サンドイッチ板は剛性の大きい *Stiff layer* の間に軽量の *core* をはさんだものである。このサンドイッチ板の解析は数級解、有限要素法、有限帯板法、伝達マトリックス法などにより数多くおこなわれているが、そのほとんどが数少変形理論に基づく線形解析である。サンドイッチ板の大たねけ問題は著者の知るかぎりでは A. M. Alwan¹⁾ の研究があるにすぎず、その研究も四辺単純支持の 3 layer サンドイッチ板に限られている。そこで、本研究では、Khatua, Cheung²⁾ らが導いた Multilayer Sandwich Plates に対する剛性マトリックスを大たねけ問題に拡張することにより、Multilayer Sandwich Plates の大たねけ解析をおこなった。そして、A. M. Alwan の解との比較および実験値との比較・検討をおこなった。なお、解析法としては荷重増分法を用いた。

2. Multilayer Sandwich Plates の剛性マトリックス

サンドイッチ板において core は *Stiff layer* に比較して非常に *flexible* であることを考慮して、本研究では *Stiff layer* の幾何剛性マトリックスのみを考慮し、core のめりは無視した。したがって、本研究で用いた剛性マトリックスは通常の線形理論に対する剛性マトリックスに *Stiff layer* の幾何剛性マトリックスを加えたものになっている。図-1に三角形サンドイッチ要素と仮定した節点変位を示している。節点変位としては、たれみ w 、たれみ角 $\theta_x = \frac{\partial w}{\partial x}$ 、 $\theta_y = \frac{\partial w}{\partial y}$ および面内変位 u 、 v を仮定している。ところで、 u 、 v はそれぞれの *Stiff layer* で任意としているので、 n 枚の *Stiff layer* と $(n-1)$ 枚の core より成るサンドイッチ要素の節点の自由度数は $(3+2n)$ となる。なお、本研究では次のような変位関数を用いた。

$$y_1, y_2, y_3, y_4$$

$$\left. \begin{aligned} u &= a_1 + a_2 x + a_3 y, \quad v = a_4 + a_5 x + a_6 y, \\ w &= b_1 + b_2 x + b_3 y + b_4 x^2 + b_5 xy + b_6 y^2 + b_7 x^3 + b_8 (x^2 y + xy^2) + b_9 y^3 \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

ところで、解析法として荷重増分法を用いているが、この場合、 Δu は次のように表わされる。

$$\{\mathcal{E}\} = \{\mathcal{E}_0\} + \{\Delta\mathcal{E}\} \quad (2)$$

ここに、 $\{E_n\} : (n-1)$ ステップまでに生じた全ひすみ

{ ΔE }: カステ... 7° で生じたひずみ増分

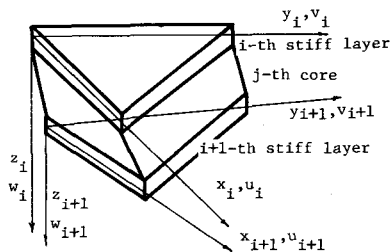


図-1 サンドイッチ板要素

式(2)より、変位増分とひずみ増分の関係を求めると *Stiff layer* では次のようになる。(図-2参照)

$$\{\Delta \mathcal{E}\}_j = \begin{bmatrix} \Delta \mathcal{E}_x \\ \Delta \mathcal{E}_y \\ \Delta \mathcal{E}_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x} \\ \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial y} \\ \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial xy} \end{bmatrix} - \mathcal{E} \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 \mathcal{H}}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 \mathcal{H}}{\partial y^2} \\ 2 \frac{\partial^2 \mathcal{H}}{\partial x \partial y} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x} \right)^2 \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial y} \right)^2 \\ \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial y} \end{bmatrix} \quad (3)$$

式(3)の右辺第三項が大にわきの場合に導入される項であり、楔形解析では無視される。次に、core での変位増分とむずね増分の関係は図-2を参考にして次式のように与えられる。

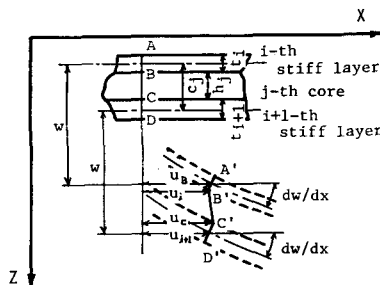


図-2 サンドイッチ板の変形

$$\{\Delta E\}_c = \left\{ \frac{dE_c}{d\gamma_{q2}} \right\} = \frac{C_j}{h_j} \left\{ \frac{U_i - U_{i-1}}{C_j} + \frac{\partial U}{\partial \gamma} \right\}$$

式(3),(4)の変位・ひずみ関係式を用いることにより、第nステープでの Multilayer Sandwich 要素の剛性マトリックス $[k_e]_n$ が次のように求められる。

$$[k_e]_n = [k_m]_n + [k_p]_n + [k_g]_n + [k_c]_n$$

ここに、 $[k_m]_n, [k_p]_n, [k_g]_n$: 第nステープでの Stiff layer の曲げ剛性、面内、幾何剛性マトリックス、 $[k_c]_n$: core layer のせん断剛性マトリックス。

3. 解析手順

解析方法は前述したように荷重増分法を用いたが、それ以外の Stiff layer での面内変位 u, v が任意なので、同一要素内でも各 Stiff layer に対して回転マトリックスを求め、各層で $[k_m], [k_p], [k_g], [k_c]$ をそれぞれの変位の回転をこなした。(図-1参照)

4. 結果および考察

図-3 に要素の分割方法および要素数の変化による本法の解の変化を示している。すなわち、この場合ステープ数 $n=1$ つまり線形理論で荷重は等分布荷重である。分割タイプ (a) の16要素で Plantema による解とよく一致しているが、実験値との比較にはタイプ (a) の16要素を用いる。次に、ステープ数の変化による解の収束状態を求め、各回おこなった実験に対する数値計算でステープ数 $n=5, 10, 20, 30$ でおこなった。その結果を図4に示している。各ステープでの結果はほぼ一致しており、特に10, 20, 30ステープではほとんど差がない。図-4 に本法による解と A.M. Alwan による解の比較を示している。解析モデルは、等分布荷重を受ける四辺単純支持の3層サンドイッチ板である。本法のステープ数は $n=40$ であり、A.M. Alwan の級数項は第5項までとしている。本法による解が少し大きめのたれみを与えているが非線形の様子とはよく一致している。

今回、サンドイッチ板を実際に作成し、曲げ試験をおこなった。本法による解との比較・検討をおこなった。試験体は $40\text{cm} \times 40\text{cm}$ の正方形板とし、Stiff layer は厚さ 0.025cm の亜鉛引き鉄板、core には厚さ 0.5cm のババハエカムコープを使用した。実験は四辺単純支持で中央に集中荷重をかけておこなった。図-5 に載荷点でのたれめを示している。荷重が 300kg 付近までは理論値と実験値はよく一致している。しかし、荷重がそれより大きい範囲では実験値が塑性挙動を示し、理論値より大きくなる。

参考文献 1) A.M. Alwan; Bending of Sandwich Plates with Large Deflections, ASCE, Vol. 93, No. EM3, June 1967

2) T.P. Kholia, Y.K. Cheung; Triangular Element For Multilayer Sandwich, ASCE, Vol. 98, No. EM5, OCT. 1972

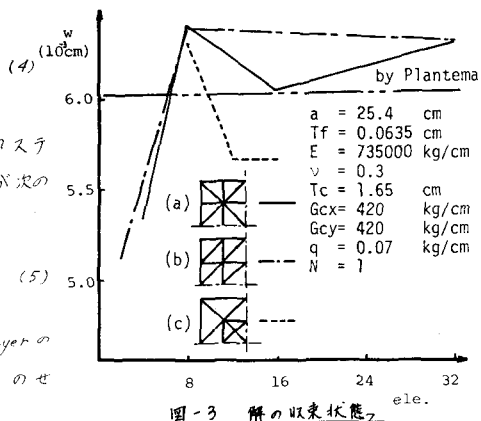


図-3 解の収束状態

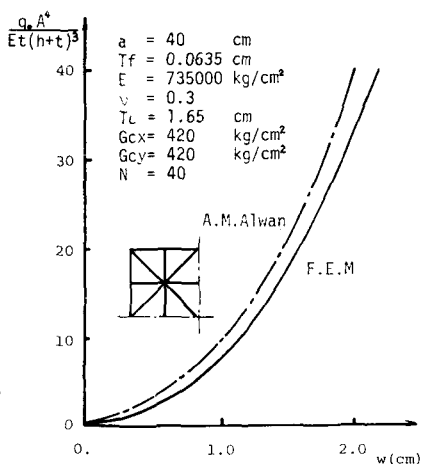


図-4 解の比較(線形解とFEM)

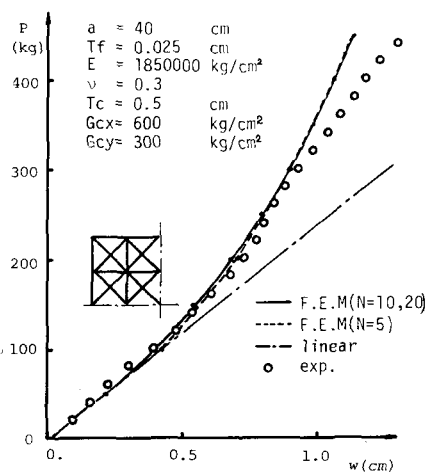


図-5 荷重-たれめ曲線