離散化モデルの有する力学的特性に関する基礎的研究

岡山大学　正員　谷口健男　　神戸大学　学生員　○山田重和　　岡山市　友実武則

1．まえがき　最近，有限要素法（ＦＥＭ）は工学の各分野で広く使用されているが，離散分割において本質的な離散誤差の影響は残り，なるべくよい解を得るための離散分割法はまだ提案されていない。本研究においては，変位法で二次元弾性体の例題を通して要素数，離散分割モデルを変化させ，離散誤差を生じる原因を応力評価度という用語，そして分割線の方向性を主にして考察し，それにもとづく最適離散分割法を提案し，数学モデルを実構造物に少しでも近づける指針を示そうとした。

2．数値実験[1]　ヤング係数　2100000kg/cm²　ポアソン比　0.3　初期板厚1.0cm

例題1．一端固定板の引張り（FIG-1）　$\overline{AB}=200$cm，$\overline{AO}=800$cm，$\omega=125.0$kg/cm²

例題2．一端固定板の曲げ・センン断（FIG-2）　$\overline{AB}=200$cm　$\overline{AO}=692.82$cm

$\omega=50$kg/cm²　センン断の影響は7.5％である。

FIG-1

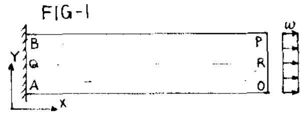
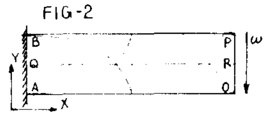


FIG-2



本研究の場合，平面応力状態での要素の離散誤差を問題とするので，変位関数として完全性，適合性の条件を全て満足する次のような座標の一次関数を使用した。　三角形要素　$u=\alpha_1+\alpha_2X+\alpha_3Y$　$v=\alpha_4+\alpha_5X+\alpha_6Y$

長方形要素　$u=\alpha_1+\alpha_2X+\alpha_3XY$　$v=\alpha_5+\alpha_6X+\alpha_7Y+\alpha_8XY$

FIG-3

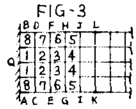
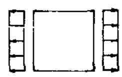


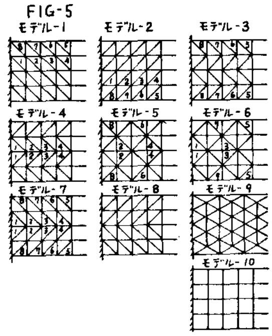
FIG-4



3．結果及び考察　X軸方向分割数をN，Y軸方向分割数をMとする。

例題1．モデル⑨を除く三角形要素の自由端でのX軸方向変位は小さく，要素数の増加につれて変位は大きくなり一定値に収束していく。M数よりN数の増加で変位は大きくなり，M数は最低2以上必要である。モデル①と②では分割線の方向性のため自由端の中点で①が下へ，②が上へY軸方向変位し，絶対値は等しく，要素数の増加につれてこの傾向は小さくなる。各断面変位は，固定端のサンブナンの原理に似た影響のため，固定端付近で平面保持の仮定がくずされる。FIG-3のA，B点付近で応力集中が生じ，平均応力より大きくなり，Q点付近の応力はそのため小さい。固定端のない板の引張り問題（FIG4）においては離散分割モデルの種類によらず，M，N＝2　要素数＝8で完全に理論値に一致するため，変位が離散分割モデルにより変化するのは，固定端の存在による影響と考えられる。離散分割モデルの種類をFIG-5に示す。

FIG-5



離散分割モデルによる離散誤差の原因として次の4つが考えられる。

1）サンブナンの原理に似た現象，2）離散分割線の方向性　3）節点自由度　4）局部的な影響，　平面保持の仮定がくずされる断面では変位の算術平均をとるので4)の影響はなく，3)も局所的には節点自由度が小さいものほど変位しやすい傾向はあるがMを偶数とすると各断面節点自由度数はモデル⑨⑩以外のモデルでは一定であるのでこの影響もMを偶数とする場合ないと考えられる。1)を考察するのに応力評価度という用語を提案する。一様応力状態のため，主応力線により分けられる領域は応力値が相違になる。

固定端付近では主応力方向が中立軸に向き，FIG-6のB点に隣接する三角形を合わせて長方形とした場合，分割線が主応力方向に近い①の方が応力伝達がよいと考えてその長方形の平均応力に応じた重みを付け，②には付けないものとするのを応力評価度という用語で表わした。

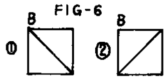
TABLE-1

モデル	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$\overline{CD}$ FEM較順位	5	5	4	7	3	8	2	9	1
応力評価度	9	9	16	2	16	2	18	0	
評価度較順位	5	5	3	7	3	7	2	9	1
$\overline{EF}$ FEM較順位	5	5	3	8	4	7	2	9	1
応力評価度	18	18	30	6	20	16	36	0	
評価度較順位	5	5	3	8	4	7	2	9	1
$\overline{GH}$ FEM較順位	5	5	4	8	3	7	2	9	1
応力評価度	27	27	42	12	32	22	54	0	
評価度較順位	5	5	3	8	4	7	2	9	1
$\overline{IJ}$ FEM較順位	5	5	4	8	3	7	2	9	1
応力評価度	36	36	52	20	40	32	72	0	
評価度較順位	5	5	3	8	4	7	2	9	1
$\overline{KL}$ FEM較順位	5	5	4	8	2	7	3	9	1
$\overline{OP}$ FEM較順位	5	5	4	8	2	7	3	9	1
分割線の方向性	大	大	小	小			中	中	

TABLE-2

モデル	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\overline{CD}$ FEM較順位	6	7	5	8	3	10	4	9	2	1
応力評価度	9	9	16	2	16	2	18	0		
評価度較順位	6	6	4	8	4	8	3	10	2	1
$\overline{EF}$ FEM較順位	7	8	5	9	3	6	4	10	2	1
応力評価度	18	18	30	6	20	16	36	0		
評価度較順位	6	6	4	9	5	8	3	10	2	1
$\overline{GH}$ FEM較順位	7	8	5	9	3	6	4	10	2	1
応力評価度	27	27	42	12	32	22	54	0		
評価度較順位	6	6	4	9	5	8	3	10	2	1
$\overline{IJ}$ FEM較順位	7	8	6	9	3	4	5	10	2	1
応力評較順位	36	36	52	20	40	32	72	0		
評価度較順位	6	6	4	9	5	8	3	10	2	1
$\overline{OP}$ FEM較順位	7	8	6	9	3	4	5	10	2	1
分割線の方向性	大	大	小	小			中	中		

FIG-6



固定端の影響がY軸方向部材長に等しいくらいあると考えて，応力評価度をFIG-3のようにし，M＝4，N＝16，要素数＝128に限定して考えてみた。

FIG-7

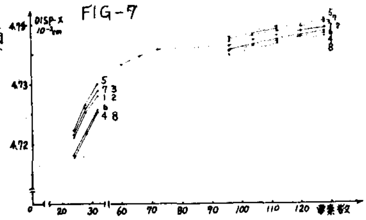


FIG-8

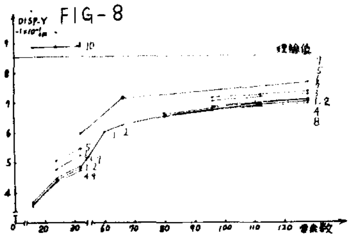
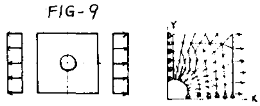


FIG-9



結果をTABLE－1に示す。FIG－7はモデルによるX軸方向変位－要素数を示したものである。離散分割モデルの種類によるなあみやすさの順位（軟順位）は$\overline{KL}$で安定し，断面保持はもう少し自由端に近い断面でなりたつ。モデル①と②は分割線の方向性が逆であるがX軸方向変位においては一致し，軟順位は同じである。$\overline{EF}$まではFEMと応力評価度の両者の軟順位が一致するので，ここまでは原因1)が卓越し，$\overline{GH}$・$\overline{IJ}$においては，応力評価度により軟順位の傾向はつかめるが原因2)が卓越してくると考えられる。モデル③と⑤が逆転するのは，この付近では方向性のない離散分割が軟順位をよくする特性を持っており，$\overline{KL}$においても同様である。モデル⑨は分割線の方向性がなく，分割線方向が他のモデルに比べてより主応力方向に近いため良い結果を出したと思われる。

また，離散分割モデルの種類により主応力方向の収束値が異なる。[3),4)] これは完全な離散誤差と考えられる。FIG－6の二つの三角形の主応力方向の算術平均値が異なり，モデル①と②で本例題の場合，2°の角度差があった。

例題2．Y軸方向変位を考えると，モデル⑩はM数の増加で同要素数でも極端に硬くなり，反対にN数の増加で軟かくなり，モデル中一番早く理論値に収束する。モデル⑨⑤⑥以外の三角形モデルの変位差は小さい。FIG－1，FIG－2に示すように例題により主応力線図が異なり，同じ応力評価度を使用するのに疑問が残るが固定端付近の傾向が類似しているので使用した結果がTABLE－2である。FIG－8は要素数－Y軸方向変位（R点）図である。Y軸方向変位のために断面の算術平均をとってみてもモデル①と②は方向性のため①が大きく変位する。モデル⑤⑥は方向性がなく，本例題の主応力線の特徴をうまく表現している。さらにモデル⑤は応力評価度が重要視される固定端付近で応力をうまく評価するので，どの断面でも良い結果を示し，モデル⑥は，応力をうまく評価しないが，方向性がないのと主応力線の特徴を表現する影響が卓越してくる断面において軟順位が除々に上がってくる。モデル⑩は，方向性が全くなく，変位関数の中に主応力方向を変化させるセン断の影響を考慮できる項が入っているために良い結果を示したと思われる。

4．あとがき　M数を奇数とすると，セン断の問題では中立軸付近応力を表現しにくい，断面自由度がモデルにより変化し，方向性のない分割がしにくい等の原因でよくないので偶数とするのが望ましい。FEMの最適離散分割法を提案すると次のようになる。①光弾性実験等により断面主応力方向にあわす離散分割を行う。これは特に固定端付近等の応力集中部において影響が大きく重要である。②分割線の方向性をなくす離散分割とする。③不均一分割では，応力集中部を密に要素数を増加させる。④M数は偶数とする。

分割法の適用例として円孔を持つ板の引張り問題（FIG－9）を行なった結果，提案した分割法を適用した場合，特に①に注意した解が他の分割に比較して主応力上良い結果を示した．この適用例ではオートメッシュを使用したので完全不均一分割ではないが，主応力（σ_1）で誤差は4％以内となった。この分割法を考慮しない，例えば等分割法では10％以上の誤差が出た。ただ，理論値としているのが無限板内に円孔のある板の引張り問題[2)]の主応力であり，有限板とするFEMとでは荷重方向に直角な部材長と円孔の直径との比率が小さいと荷重による局部変形のために，FEMの主応力方向がより以上に応力集中部に集中さす結果となり，FEMの主応力値が集中部で異常に大きくなる。比率が5以上となるとこの影響は小さくなり，本適用例では比率を5とした。

参考文献　1)三好俊郎著「有限要素法入門」培風館，2)西田正孝著「応力集中」森北出版　3)一松信，戸川隼人編「数値計算における誤差」共立出版　4)山本善之，山田善一共著「マトリクス構造解析の誤差論」培風館