

3次元図根測量について

広島工業大学

正 員

岡野 兼夫

土木工事設計用地図作成、道路台帳整備・地籍図整備などのため、縮尺 $1/1000 \sim 1/500$ の航空測図の要求が増えてきたが、その基準点として、三角点は Δ (標高) の精度が悪いため、多数の水準点を増設して対空標識を置き何らかの図化を行っている現状である。そこで $XY\Delta$ の精度がそろった3次元図根測量を行い、3次元図根点を計画的に散布して撮影すれば、能率と精度の両面における改善が期待されるわけである。

岡野は、日本測量協会誌「測量」(昭和48年7月号)に初めて3次元図根測量の試案を発表したが、この時は、光波測距儀の精度が 2 mm に達することを予想し、測定上の問題(気差など)が多い鉛直角をなるべく使わない方式を提案した。ところがその後、光波測距儀の精度が 10 mm に止まっているため、現在は鉛直角を積極的に測定して高低角方程式を作り、これを斜距離方程式、水平夾角(方向角ではない)方程式に加えて解く「3次元図根測量方式」に切りかえて成功している。(実測には研究生と卒業研究測量班が活躍した。)

図化縮尺	基準点標準誤差	空中三角により決定された 標定点最大誤差(図上0.2mm相当)	三角点 X, Y 精度 $10\text{ cm} \sim 5\text{ cm}$.
$1/2500$	$12.5 \sim 25\text{ cm}$	50 cm	X, Y のみならず、 Δ も左の範囲に収める必要があるので、三角点の Δ 精度(約 25 cm) は不十分。
$1/1000$	$5 \sim 10\text{ cm}$	20 cm	
$1/500$	$2.5 \sim 5\text{ cm}$	10 cm	

広島工業大学周辺数kmの範囲におけるテスト測量では、 $XY\Delta$ の標準誤差 $2 \sim 3\text{ cm}$ の結果を得たので、空中三角標定点との関連性などを調べるため、文部省の科学研究費《広島工大、岡山大学、京都大学の協力による空中写真測量特に大縮尺図化の諸問題研究、責任者岡山大学森忠次教授》を受け、広島島の「日本航業」の援助により、撮影と図化のテストを始めている。この詳細は別の機会にゆずり、以下とつたえず、3次元図根測量に用いた観測方程式を提示説明するに止める。

1. 高低角方程式— β 方程式 $P \rightarrow Q$

P, Q の略近座標 $(X_P, Y_P, Z_P), (X_Q, Y_Q, Z_Q)$ を与え、その修正量を $x_P, y_P, z_P; x_Q, y_Q, z_Q$ とすれば、高低角の最確値 $\bar{\beta}_i$ はこれらを用いて次のように表わすことができる。偏微分係数の添字 0 は、偏微分後 $(x, y, z) = (0, 0, 0)$ を代入した値を示す。

$$\bar{\beta}_i = \tan^{-1} \frac{(Z_Q + z_Q) - (Z_P + z_P)}{\sqrt{\{(X_Q + x_Q) - (X_P + x_P)\}^2 + \{(Y_Q + y_Q) - (Y_P + y_P)\}^2}} = f(x_P, y_P, z_P, x_Q, y_Q, z_Q)$$

$$= f(0, 0, 0, 0, 0, 0) + \left(\frac{\partial \bar{\beta}_i}{\partial x_P}\right)_0 x_P + \left(\frac{\partial \bar{\beta}_i}{\partial y_P}\right)_0 y_P + \left(\frac{\partial \bar{\beta}_i}{\partial z_P}\right)_0 z_P + \left(\frac{\partial \bar{\beta}_i}{\partial x_Q}\right)_0 x_Q + \left(\frac{\partial \bar{\beta}_i}{\partial y_Q}\right)_0 y_Q + \left(\frac{\partial \bar{\beta}_i}{\partial z_Q}\right)_0 z_Q \quad (1)$$

一方、高低角の実測値 β_i'' とその補正量 v_{β_i}'' を用いれば、高低角の最確値 $\bar{\beta}_i$ は次のように表わすこともできる。

式(2)の右辺と式(1)の右辺を等しいと置き、座標修正量の項を右辺に、その他の項を左辺に整理すれば

$$(\beta_i - \bar{\beta}_i) + v_{\beta_i}'' = \rho'' \frac{(X_Q - X_P) \sin \bar{\beta}_i \cos \bar{\beta}_i}{\bar{S}_i^2} x_P + \rho'' \frac{(Y_Q - Y_P) \sin \bar{\beta}_i \cos \bar{\beta}_i}{\bar{S}_i^2} y_P - \rho'' \frac{\bar{S}_i (\cos^2 \bar{\beta}_i)}{\bar{S}_i^2} z_P$$

$$- \rho'' \frac{(X_Q - X_P) \sin \bar{\beta}_i \cos \bar{\beta}_i}{\bar{S}_i^2} x_Q - \rho'' \frac{(Y_Q - Y_P) \sin \bar{\beta}_i \cos \bar{\beta}_i}{\bar{S}_i^2} y_Q + \rho'' \frac{\bar{S}_i (\cos^2 \bar{\beta}_i)}{\bar{S}_i^2} z_Q$$

(3)

計算差高 $\tilde{\eta}_i = Z_Q - Z_P$

計算水平距離 $\tilde{S}_i = \sqrt{(X_Q - X_P)^2 + (Y_Q - Y_P)^2}$

計算高低角 $\tilde{\beta}_i = \tan^{-1} \frac{(Z_Q - Z_P)}{\sqrt{(X_Q - X_P)^2 + (Y_Q - Y_P)^2}} = \tan^{-1} \frac{\tilde{\eta}_i}{\tilde{S}_i} = f(0, 0, 0, 0, 0, 0)$

式(1)の右辺第1項

2. 斜距離方程式' — U方程式' $p \rightarrow q$

P, Q間の斜距離の最確値 $\overline{U_i}$ を P, Qの略近座標とその修正量で示せば

$$\begin{aligned} \overline{U_i} &= \sqrt{\{(X_p + x_p) - (X_q + x_q)\}^2 + \{(Y_p + y_p) - (Y_q + y_q)\}^2 + \{(Z_p + z_p) - (Z_q + z_q)\}^2} = f(x_p, y_p, z_p, x_q, y_q, z_q) \\ &= \underbrace{f(0, 0, 0, 0, 0, 0)}_{\overline{U_i} \text{ とおく}} + \left(\frac{\partial \overline{U_i}}{\partial x_p}\right)_0 x_p + \left(\frac{\partial \overline{U_i}}{\partial y_p}\right)_0 y_p + \left(\frac{\partial \overline{U_i}}{\partial z_p}\right)_0 z_p + \left(\frac{\partial \overline{U_i}}{\partial x_q}\right)_0 x_q + \left(\frac{\partial \overline{U_i}}{\partial y_q}\right)_0 y_q + \left(\frac{\partial \overline{U_i}}{\partial z_q}\right)_0 z_q \quad (4) \end{aligned}$$

一方、斜距離の実測値 U_i とその補正量 v_i で $\overline{U_i}$ を示せば $\overline{U_i} = U_i + v_i$ (5)

式(5)の右辺と式(4)の右辺を等しいと置き、座標修正量の項を右辺へ、その他の項を左辺へ整理して示せば

$$(U_i - \overline{U_i}) + v_i = \frac{-(X_p - X_q)}{\overline{U_i}} x_p + \frac{-(Y_p - Y_q)}{\overline{U_i}} y_p + \frac{-(Z_p - Z_q)}{\overline{U_i}} z_p + \frac{(X_p - X_q)}{\overline{U_i}} x_q + \frac{(Y_p - Y_q)}{\overline{U_i}} y_q + \frac{(Z_p - Z_q)}{\overline{U_i}} z_q \quad (6)$$

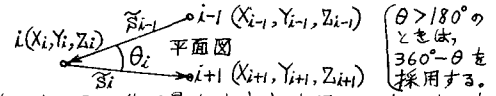
角の観測方程式といふしよに使用するため、両辺を $\overline{U_i}$ で割って v_i を rad. 化し、せうに両辺に ρ'' を乗じ v_i を秒数化すれば、つぎのようは“角化された斜距離方程式”を得る。 $\rho'' \left(\frac{v_i}{\overline{U_i}} \right) = v_i''$ と置く。

$$\left(\frac{U_i - \overline{U_i}}{\overline{U_i}} \right) \rho'' + v_i'' = \frac{-\rho''(X_p - X_q)}{\overline{U_i}^2} x_p + \frac{-\rho''(Y_p - Y_q)}{\overline{U_i}^2} y_p + \frac{-\rho''(Z_p - Z_q)}{\overline{U_i}^2} z_p + \frac{\rho''(X_p - X_q)}{\overline{U_i}^2} x_q + \frac{\rho''(Y_p - Y_q)}{\overline{U_i}^2} y_q + \frac{\rho''(Z_p - Z_q)}{\overline{U_i}^2} z_q$$

ただし、 $\overline{U_i} = \sqrt{(X_p - X_q)^2 + (Y_p - Y_q)^2 + (Z_p - Z_q)^2} = f(0, 0, 0, 0, 0, 0)$ — U方程式' — (7)

略近座標から計算した斜距離(計算斜距離)

3. 水平角方程式' — θ 方程式' $2^\circ < \theta < 178^\circ$



右図のようは、点 $i-1, i, i+1$ の略近座標が与えられたとき、その修正量を小文字を用いて表示する事にすれば、点 i における水平角(夾角) θ_i の最確値 $\overline{\theta_i}$ は、方向余弦式を応用して次のようは表わされる。

$$\begin{aligned} \overline{\theta_i} &= \cos^{-1} \frac{\{(X_{i-1} + x_{i-1}) - (X_i + x_i)\} \{(X_{i+1} + x_{i+1}) - (X_i + x_i)\} + \{(Y_{i-1} + y_{i-1}) - (Y_i + y_i)\} \{(Y_{i+1} + y_{i+1}) - (Y_i + y_i)\}}{\sqrt{\{(X_{i-1} + x_{i-1}) - (X_i + x_i)\}^2 + \{(Y_{i-1} + y_{i-1}) - (Y_i + y_i)\}^2} \cdot \sqrt{\{(X_{i+1} + x_{i+1}) - (X_i + x_i)\}^2 + \{(Y_{i+1} + y_{i+1}) - (Y_i + y_i)\}^2}} \\ &= f(x_{i-1}, y_{i-1}, x_i, y_i, x_{i+1}, y_{i+1}) \quad \text{両辺に } \rho'' \text{ を乗じ、} \\ & \quad \text{度数化して用いる} \quad (8) \quad \text{Z および } \overline{\theta_i} \text{ が無いこと(注意)} \\ &= \underbrace{f(0, 0, 0, 0, 0, 0)}_{\overline{\theta_i} \text{ とおく}} + \left(\frac{\partial \overline{\theta_i}}{\partial x_{i-1}}\right)_0 x_{i-1} + \left(\frac{\partial \overline{\theta_i}}{\partial y_{i-1}}\right)_0 y_{i-1} + \left(\frac{\partial \overline{\theta_i}}{\partial x_i}\right)_0 x_i + \left(\frac{\partial \overline{\theta_i}}{\partial y_i}\right)_0 y_i + \left(\frac{\partial \overline{\theta_i}}{\partial x_{i+1}}\right)_0 x_{i+1} + \left(\frac{\partial \overline{\theta_i}}{\partial y_{i+1}}\right)_0 y_{i+1} \end{aligned}$$

一方、水平角の実測値 θ_i'' とその補正量 v_{θ_i}'' で $\overline{\theta_i}$ を表わせば $\overline{\theta_i} = \theta_i'' + v_{\theta_i}''$ (9)

式(9)の右辺と、度数化した式(8)の右辺を等しいと置き、座標修正量の項を右辺へ、その他の項を左辺へ整理して、水平角方程式が次のようは出来る。

$$\begin{aligned} (\theta_i'' - \overline{\theta_i}) + v_{\theta_i}'' &= -\rho'' \left\{ \left(\frac{\tilde{L}_{i-1}}{\tilde{S}_{i-1}^2} \cos \overline{\theta_i} \right) + \left(\frac{\tilde{L}_i}{\tilde{S}_{i-1} \tilde{S}_i \sin \overline{\theta_i}} \right) \right\} x_{i-1} - \rho'' \left\{ \left(\frac{\tilde{D}_{i-1}}{\tilde{S}_{i-1}^2} \cos \overline{\theta_i} \right) + \left(\frac{\tilde{D}_i}{\tilde{S}_{i-1} \tilde{S}_i \sin \overline{\theta_i}} \right) \right\} y_{i-1} + 0 \cdot z_{i-1} \\ & \quad + \rho'' \left\{ \left(\frac{\tilde{L}_{i-1}}{\tilde{S}_{i-1}^2} - \frac{\tilde{L}_i}{\tilde{S}_{i-1}^2} \right) \frac{\cos \overline{\theta_i}}{\sin \overline{\theta_i}} - \left(\frac{\tilde{L}_{i-1}}{\tilde{S}_{i-1} \tilde{S}_i} - \frac{\tilde{L}_i}{\tilde{S}_{i-1} \tilde{S}_i} \right) \right\} x_i + \rho'' \left\{ \left(\frac{\tilde{D}_{i-1}}{\tilde{S}_{i-1}^2} - \frac{\tilde{D}_i}{\tilde{S}_{i-1}^2} \right) \frac{\cos \overline{\theta_i}}{\sin \overline{\theta_i}} - \left(\frac{\tilde{D}_{i-1}}{\tilde{S}_{i-1} \tilde{S}_i} - \frac{\tilde{D}_i}{\tilde{S}_{i-1} \tilde{S}_i} \right) \right\} y_i \\ & \quad + 0 \cdot z_i \end{aligned}$$

3次元解に組込
ときは、係数零の
Z項を附加して用
いる必要がある。

$$+ \rho'' \left\{ \left(\frac{\tilde{L}_{i-1}}{\tilde{S}_{i-1}^2} \cos \overline{\theta_i} \right) + \left(\frac{\tilde{L}_{i+1}}{\tilde{S}_{i-1} \tilde{S}_i \sin \overline{\theta_i}} \right) \right\} x_{i+1} + \rho'' \left\{ \left(\frac{\tilde{D}_{i-1}}{\tilde{S}_{i-1}^2} \cos \overline{\theta_i} \right) + \left(\frac{\tilde{D}_{i+1}}{\tilde{S}_{i-1} \tilde{S}_i \sin \overline{\theta_i}} \right) \right\} y_{i+1} + 0 \cdot z_{i+1}$$

$$\begin{aligned} \overline{\theta_i} &= \cos^{-1} \frac{(X_{i-1} - X_i)(X_{i+1} - X_i) + (Y_{i-1} - Y_i)(Y_{i+1} - Y_i)}{\sqrt{(X_{i-1} - X_i)^2 + (Y_{i-1} - Y_i)^2} \cdot \sqrt{(X_{i+1} - X_i)^2 + (Y_{i+1} - Y_i)^2}} \\ &= \cos^{-1} \left\{ \frac{-(\tilde{L}_{i-1} \cdot \tilde{L}_i) - (\tilde{D}_{i-1} \cdot \tilde{D}_i)}{\tilde{S}_{i-1} \cdot \tilde{S}_i} \right\} = f(0, 0, 0, 0, 0, 0) \end{aligned}$$

式(8)の右辺第1項

$\tilde{L}_{i-1} = X_i - X_{i-1}$ ($i-1$ から i を見た緯距)
 $\tilde{L}_i = X_{i+1} - X_i$ (i から $i+1$ を見た緯距)
 $\tilde{D}_{i-1} = Y_i - Y_{i-1}$ ($i-1$ から i を見た経距)
 $\tilde{D}_i = Y_{i+1} - Y_i$ (i から $i+1$ を見た経距)

$\overline{\theta_i}$ の計算は $\tilde{L}, \tilde{D}, \tilde{S}$ によるのが簡単でよい。

$\tilde{S}_{i-1} = \sqrt{\tilde{D}_{i-1}^2 + \tilde{L}_{i-1}^2}$, $\tilde{S}_i = \sqrt{\tilde{D}_i^2 + \tilde{L}_i^2}$ • θ 方程式は $\times, y$ を正しく規正し間接的に Z の決定にも貢献する。
高低角が 3° 以下の場合には正確な Z を定めるために β 方程式が不可欠である。 β は正反両観測の平均が必要。