連続の式に関する一考察

徳島大学工学部　正○山上拓男
同　上　　　正　堀田政國

1. まえがき

土質工学において連続の式は浸透理論や圧密論に現れる。本文はこのような連続の式に関して，特に圧密論の如き変形しうる多孔体中の流れを対象とする場合の慣用的な誘導過程を吟味し，その不備を指摘するものである。また，同時にどのように修正されるべきかが議論されている。

2. 慣用的な誘導

一般的な三次元場を例にとり，Fig.1に示す微小要素に基づいて通常の手法で連続の式を導こう。ただし，多孔体は完全飽和とする。いま，空間に固定された座標系に関して間げき水の流速を $q_w=(v_x, v_y, v_z)$ とする。このとき，微小要素が単位時間に失う水量はFig.1を参照して，

$$\left(\frac{\partial v_x}{\partial x}+\frac{\partial v_y}{\partial y}+\frac{\partial v_z}{\partial z}\right)dxdydz \qquad \text{-------}(1)$$

ここに，$V=dxdydz$ は微小要素の体積である。これが同じ時間に受ける微小要素の体積変化 $\partial V/\partial t$ に等しいとして（間げき水は非圧縮性）

$$\left(\frac{\partial v_x}{\partial x}+\frac{\partial v_y}{\partial y}+\frac{\partial v_z}{\partial z}\right)dxdydz=\frac{\partial V}{\partial t} \qquad \text{----}(2)$$

ゆえに，

$$\frac{\partial v_x}{\partial x}+\frac{\partial v_y}{\partial y}+\frac{\partial v_z}{\partial z}=\frac{\partial \epsilon_v}{\partial t} \qquad \text{-------}(3)$$

あるいはベクトル表示して，

$$div\ q_w=\dot{\epsilon}_v \qquad \text{-----------}(4)$$

ここに，ϵ_v は体積ひずみで圧縮を正とする。

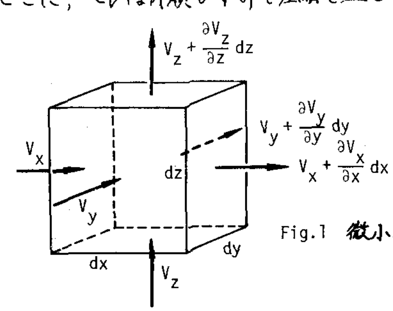

Fig.1　微小要素

さらに，Darcyの法則，

$$\frac{\partial v_x}{\partial x}=-k_x\frac{\partial H}{\partial x}\quad etc.\quad or\quad q_w=-\mathbb{k}\ grad\ H \qquad \text{---}(5)$$

を導入すれば，式(3) or (4)は

$$\left.\begin{array}{l}\frac{\partial}{\partial x}\left(k_x\frac{\partial H}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(k_y\frac{\partial H}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(k_z\frac{\partial H}{\partial z}\right)=-\frac{\partial \epsilon_v}{\partial t}\\ or\quad div\left(\mathbb{k}\ grad\ H\right)=-\dot{\epsilon}_v\end{array}\right\} \quad (6)$$

ここに，Hは全水頭，$\mathbb{k}$は透水係数テンソルである。

ここで，多孔体を均質等方性とし，過剰間げき水圧uで上式を書き下せば周知の連続の式が求められる。

$$\frac{k}{\gamma_w}\nabla^2 u+\frac{\partial \epsilon_v}{\partial t}=0 \qquad \text{-----------}(7)$$

ただし，kは透水係数，γ_wは間げき水の単位重量.

以上は多くの土質力学のテキストに採用されている連続の式の誘導を要約したもので，一見なんら疑問を挟む余地は無いかの如く見受けられる。しかしながら，式(3)には重大な誤りが認められるのである。まず，式(3)の左辺，すなわち式(1)を導く際にはこの要素は変形しないものとしており，一方右辺は正に変形量そのものである点に大きな矛盾を含む。あるいは微小変形を前提とする限り，式(1)の誘導に際して変形を考えてもそれが微小であるから無視しうるとの見方もできよう（実のところ筆者らも従来このような解釈をしてきたし，他の多くの人々もまた例外ではなかろう）。しかし，このときは右辺も当然微小であり，$\partial V/\partial t$ or $\partial \epsilon_v/\partial t$ のみを残す理由はない。言い換えれば，式(3)が成り立つのは右辺が零のときのみである。

ここで，結論から先に言えば，上に示した式(6)or(7)の誘導過程には上述のような大きな誤りが指摘できるにもかかわらず，最終の式のみは課せられた仮定のもとで厳密に正しいのである。以下に厳密な誘導を示しつつ，この点を明らかにしよう。

3. 厳密な誘導

先と同様変形しうる飽和多孔体中の流れを考えるが，変形は微小であるとする。そして，変形しうる多孔体の

意義は正に固相（土粒子）が変位速度を持ちうるところにあるのであって，これを v_s で表す．さらに v_s で運動している固体粒子に対する相対的な間げき水の流速（容積流量）q_r を導入する．まず，間げき水及び固体粒子を共に非圧縮性とするとき，これら二相に対する質量保存則は次の二式で与えられる．

$$\mathrm{div}\, q_w + \frac{\partial n}{\partial t} = 0 \quad \text{--------- (8)}$$

$$\mathrm{div}[(1-n)\, v_s] = \frac{\partial n}{\partial t} \quad \text{--------- (9)}$$

ここに，nは間げき率である．さらに，変形しうる多孔体中の特徴的な一面は，各相が相対運動することであって，この事実は次式で表現される。

$$q_w = q_r + n\, v_s \quad \text{---------- (10)}$$

式(8)，(10)より

$$\mathrm{div}(q_r + n\, v_s) + \frac{\partial n}{\partial t} = 0 \quad \text{------- (11)}$$

$$\therefore \mathrm{div}\, q_r + n\, \mathrm{div}\, v_s + v_s \cdot \mathrm{grad}\, n + \frac{\partial n}{\partial t} = 0 \quad \text{-- (12)}$$

また，土粒子の質量保存則；式(9)を変形して，

$$\mathrm{div}[(1-n)\, v_s] = (1-n)\, \mathrm{div}\, v_s - v_s \cdot \mathrm{grad}\, n = \frac{\partial n}{\partial t} \quad \text{-- (13)}$$

よって，式(12)，(13)から

$$\mathrm{div}\, q_r + \mathrm{div}\, v_s = 0 \quad \text{---------- (14)}$$

しかるに，微小変形のもとで構造骨格の変位ベクトルを u_s とすれば

$$v_s = \frac{\partial u_s}{\partial t} \quad \text{ゆえに，} \quad \mathrm{div}\, v_s = -\dot{\epsilon}_v \quad \text{--- (15)}$$

よって，式(14)より

$$\mathrm{div}\, q_r = \dot{\epsilon}_v \quad \text{----------- (16)}$$

この式(16)が先の式(4)に代るべきものである．特に左辺に固定された座標系に関する見掛けの流速 q_w ではなく，相対速度 q_r が現れている点に注意せねばならない。そして，式(16)は，式(4)では全く考慮されていない土粒子の質量保存則（連続の条件）を満している点で完全である。

ここで，式(4)と式(16)の相違を間接的に評価してみよう。まず，式(10)から

$$\mathrm{div}\, q_r = \mathrm{div}\, q_w - n\, \mathrm{div}\, v_s - v_s \cdot \mathrm{grad}\, n \quad \text{--- (17)}$$

この式(17)で，微小変形を仮定するとき，右辺第3項は他の項に比べて高次の微小項と考えられるのでこれを無視すれば，式(15)〜(17)から次式が求められる．

$$\mathrm{div}\, q_w = (1-n)\, \dot{\epsilon}_v \quad \text{---------- (18)}$$

すなわち，式(4)を用いることは，上式で1に対してnを無視することに相当し，決して許されない操作である．

さて，間げき水の運動方程式であるDarcyの法則は固相に対する相対的な流量を規定すべきものと考えられ，変形しうる多孔体においては，相対速度を用いて次式で表されるべきである．注]

$$q_r = q_w - n\, v_s = -k\, \mathrm{grad}\, H \quad \text{------- (19)}$$

（慣用的に用いられる式(5)との相違に注意）

よって，式(16)，(19)からこの場合も結論のみは式(6)と一致するのである．

以上を要約すれば，前節の慣用的な誘導過程には固相の質量保存則の欠如と，Darcy則に相対速度を導入していないという二つの重大な誤りが指摘できる。そして，これらが幸いなことに互いに打消し合って，結論のみは正しい状態に到達していると解釈できるのである．

注]式(19)の説明：Fig. 2で任意時刻tにAにあった水・土粒子が，それからΔt時間後には土粒子はBに，水粒子はCに移動したとする．このとき，土粒子に相対的な流量，すなわち$\overset{\frown}{BC}$間にある水量ΔQが動水勾配に比例するとするものである．

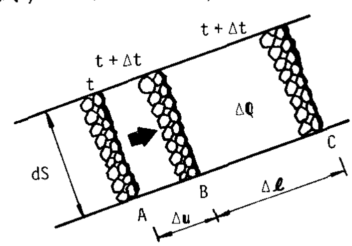

Fig.2

4．結　言

変形しうる多孔体中の流れに対する連続の式の誘導過程を検討し，多くのテキストに見られる慣用法には固相の質量保存則の欠如という重大な誤りのあることを指摘した。そして，この誤りをDarcy則の表示に伴う曖昧さが打消し，結果的に正しい連続の式に到達していることが明らかになった。

（参考文献は割愛させていただきます。）