

1. まえがき

Dean によって提案された Stream Function Theory は、波動理論における境界条件をできるだけ満足するような級数解を、数値摂動法によって求めようとするものである。その有用性はすでに示されており、Dean は何種類かの波の諸特性について波高や水粒子速度、波力などを数表にまとめているが、その計算過程や手法の詳細については発表していない。この研究は、この Stream Function Theory を利用しやすくするために、計算式を整理し、電子計算機による計算手法を検討することおよび Dean の作成した数表を利用してデータを入力させ、計算手法の妥当性を検討することである。

2. Stream Function Theory の概要

詳細は、Dean の論文を参照されたいが、ここでは直接計算に必要な事項の概要および吾等らの計算手法について説明する。なお図-1 にここで用いる座標系を示す。

Stream Function Theory は、底床境界条件および水面における運動学的境界条件と同時に満足する流れ関数 ψ を次式のように定義する。すなわち

$$\psi(x, z) = \frac{L}{\pi} z + \sum_{n=1}^N X(n) \sinh\left[\frac{2\pi n}{L}(h+z)\right] \cos\left(\frac{2\pi n}{L}x\right) \quad (1)$$

ただし、式(1)における L および $X(n)$ ($n=1, 2, \dots, N$) は未知量であり、さらにもう一つの境界条件、すなわち水面における力学的境界条件を用いて、できるだけ合理的に決定する。式(1)において、 $z = \eta$ とおくと水面の変位は、

$$\eta = \frac{L}{\pi} \eta_f - \sum_{n=1}^N X(n) \sinh\left[\frac{2\pi n}{L}(h+\eta_f)\right] \cos\left(\frac{2\pi n}{L}x\right) \quad (2)$$

とえられる。ここに、 η_f は水面における流れ関数を表わす一定値である。

つぎに、水面における力学的境界条件

$$\eta + \frac{1}{2g}[(u_f^2 - c^2) + w_f^2] - \frac{c^2}{2g} = 0 \quad (3)$$

の左辺は一定値であるが、従来の波動理論を用いるとは方向に異なっており、次のような偏差 E を生ずる。

$$E = \sum_{j=1}^J (Q_j - \bar{Q})^2, \quad \bar{Q} = \frac{1}{J} \sum_{j=1}^J Q_j \quad (4)$$

ここで、 Q_j は x 方向に波長 L を $(J-1)$ に等分割した j 番目の Q の値であり、 $\bar{Q}$ はその一波長にわたる平均値である。Stream Function Theory はこの偏差 E を最小にするために、最小自乗法を用いるものである。しかし、この最小自乗法は $(N+1)$ 個の非線形の連立方程式となるために、反復計算法により、最適な L および $X(n)$ をみいださねばならない。いさかしく、第 k 回目 k 反復計算で L^k および $X(n)^k$ と表わすならば、第 $(k+1)$ 回目の値は、

$$\left. \begin{aligned} L^{k+1} &= L^k + \Delta L \\ X(n)^{k+1} &= X(n)^k + \Delta X(n) \quad (n=1, 2, \dots, N) \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

によって計算できることになり、ここでの問題は増分 ΔL および $\Delta X(n)$ を算定する方法をみいだすことに帰着する。そこで、第 $(k+1)$ 回目の Q_j を、

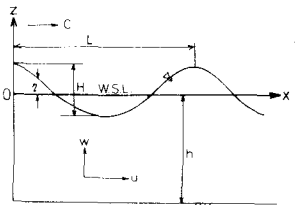


図-1 座標系

$$Q_j^{k+1} = Q_j^k + \frac{\partial Q}{\partial L} \Delta L + \sum_{n=1}^N \frac{\partial Q}{\partial X(n)} \Delta X(n) \quad (6)$$

と近似することにより、各増分に対して $(N+1)$ 個の線型連立方程式がえられる。

以上の計算式を用いて、式(4)の偏差がある値以下になると最適解とみなし計算を終了する。これらの式は次元をもっているために無次元化を行ない、図-2に示す流れ図に従って計算を進める。

データの読み込みは、波高 H 、周期 T 、水深 h および stream function theory の級数展開で用いる項数 N 、一増分を分割したステップ数 J の5つである。初期値として、波長 L は微小振幅理論によつて与えられる浅水波長を用い、 $X(1)$ は微小振幅理論によつて与えられる水面での最大水平水粒子速度と、stream function theory の N を1としたときの水粒子速度を等しくすることにより求めた値を用いる。その他の $X(n)$ ($n=2, 3, \dots, N$) および Q の初期値はすべてゼロとする。その後、これらの値を満足する水面形状および水面における流れ関数を決定し、水面における動的境界条件の誤差を $E = \sqrt{E_1^2 + E_2^2}$ (ここで $E_1 = E/H$) と定義し、この誤差がある値以下になると解がえられたことになる。この $E > \alpha$ であれば、さらに各増分に対する連立方程式を解き、式(5)により新しい L および $X(n)$ を決定し、再度 Q および Q の計算を繰り返す。

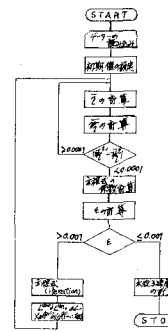


図-2 流れ図

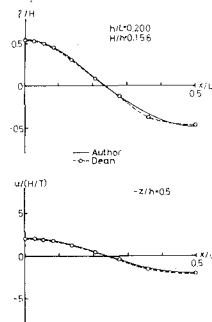


図-3 水面波形および水粒子速度

3. 計算手法の妥当性

Dean の提案した stream function theory の基本式をもとに、計算式を展開して電子計算機のプログラムを作成した。しかし、計算精度検証のよいものとはいえず、計算の途中で発散するケースや条件を満足する解が一つに定まらず解がゼロに近づく場合もある。その結果、Dean は40ケースについて計算を行ったにもかかわらず、この計算手法を用いることがケースレの計算可能とはならなかった。そのうちの1ケースを図-4に示す。この図の上側は無次元水面形状 z/H 、下側は水平水粒子速度を (H/T) で無次元化した $u/(H/T)$ の左右側の両側の半波長分である。この図からわかるように、計算可能なケースについては、谷の極相付近の一部でDeanの計算結果と著者の相違がみられるがほぼ一致しているようである。

以上の結果、この計算手法を用いると、波の条件によって異なるが、 $h/L \geq 0.5$ の場合では計算可能となり、実験値と比較しても非常に有効であるが、 $h/L < 0.5$ か、または H/h の値が大きくなり碎波に近づくケースでは、計算の途中で発散するものが多くなる。これは初期値の決定に問題を含んでおり、級数の項数を順次に増やして初期値を決定してゆかなければならないと考えられる。また、ここで $\alpha \leq 0.001$ として最適値を求めたが、それ以後も計算と続いており、 E の値も 0.001 に収束しているとは限らない。そこで、 $\alpha = 0.001$ と決定せず、さらに検討する必要があると考えられる。今後、この計算手法を改良して、さらに広い範囲で適用できるように検討するつもりである。

参考文献 1) Dean, R.G.: Stream Function Representation of Nonlinear Ocean Waves, Jour. Geophysical Res., Vol. 70, No. 18, 1965, pp. 4561~4572. 2) Dean, R.G.: Relative Validity of Water Wave Theorqs, Proceedings, ASCE Specialty Conference on Civil Engineering in The Oceans, San Francisco, 1968, pp. 1~30. 3) Dean, R.G.: Evaluation and Development of Water Wave Theory for Engineering Application, Presentation of Result, Special Report No. 1, November, 1974.