

卓上計算機による半無限防波堤周辺

の波高分布(厳密解)の計算法

徳島大学工学部 正員 三井 宏

1. 研究目的

大型電子計算機に接続した端末処理装置を各部屋に設置している所では必要ないが、一般には計算機室へ足を運ばねばならず、また、あまり混み合っていないときでも、事務処理の都合により半日ぐらい待たねばならないので、プログラム計算が可能な卓上計算機に頼ることが多い。半無限防波堤周辺の波を表す Sommerfeld の解は、回折・散乱波の基本的性質を調べるときにも、また、実際の防波堤周辺の波高分布を求めるときにもよく用いられる。ところが、後述のようにこの解には Fresnel 積分が含まれているので、電子計算機に頼る必要があった。ここで、われわれが必要とする波高比の精度を考えてみると、せいぜい小数点以下2桁目まで正確であれば十分な場合が多い。以下に示す計算法は、この程度の精度を持つ Fresnel 積分の関数近似によるものである。

2. 波高分布

図-1に示すように、水深一様な海域の $y=0$, $x \geq 0$ に置かれた半無限防波堤に振幅1, 入射角 α , 周期 T の入射波

$g_0 = \exp[ip \cos(\theta - \alpha)] \cdot \exp(i\sigma t)$, $p = kr$, $k = 2\pi/\lambda$, $\sigma = 2\pi/T$ がやって来るとき、時間因子 $\exp(i\sigma t)$ を省略した周辺の波の定常解 $f(r, \theta)$, すなわち、Sommerfeld の解は次式で示される。

$$f(r, \theta) = 0.5 \{ 1 \pm C \pm S \pm i(C - S) \} \cdot \exp[ip \cos(\theta - \alpha)] + 0.5 \{ 1 \pm C' \pm S' \pm i(C' - S') \} \cdot \exp[ip \cos(\theta + \alpha)], \quad \alpha \neq 0, 2\pi \quad (1)$$

ここに、 C および S は $\int_0^{|\sigma|} \cos \frac{\pi}{2} u^2 du \equiv C$, $\int_0^{|\sigma|} \sin \frac{\pi}{2} u^2 du \equiv S$

で定義される Fresnel 積分で、 C' および S' は上式の積分上限 σ の代わりに $-\sigma$ を用いたものである。

$$\sigma = 2\sqrt{p/\pi} \cos 0.5(\theta - \alpha), \quad \sigma' = 2\sqrt{p/\pi} \cos 0.5(\theta + \alpha)$$

式(1)の複号は σ または $-\sigma$ の符号をそれぞれとる。 $\alpha = 0$ または 2π の場合には、式(1)の右辺に0.5を乗じる。防波堤周辺の波高比は式(1)の絶対値であるから、以下のように解を実部 Re と虚部 Im に分けて示す。

$$X_1 \equiv (1 - C - S) \cos\{p \cos(\theta - \alpha)\} + (C - S) \sin\{p \cos(\theta - \alpha)\}$$

$$X_2 \equiv (1 - C' - S') \cos\{p \cos(\theta + \alpha)\} + (C' - S') \sin\{p \cos(\theta + \alpha)\}$$

$$X_1' \equiv -(C - S) \cos\{p \cos(\theta - \alpha)\} + (1 - C - S) \sin\{p \cos(\theta - \alpha)\}$$

$$X_2' \equiv -(C' - S') \cos\{p \cos(\theta + \alpha)\} + (1 - C' - S') \sin\{p \cos(\theta + \alpha)\}$$

反射領域 ($0 \leq \theta \leq \pi - \alpha$):

$$Re = \cos\{p \cos(\theta - \alpha)\} + \cos\{p \cos(\theta + \alpha)\} - 0.5(X_1 + X_2) \quad (2)$$

$$Im = \sin\{p \cos(\theta - \alpha)\} + \sin\{p \cos(\theta + \alpha)\} - 0.5(X_1' + X_2') \quad (3)$$

入射領域 ($\pi - \alpha \leq \theta \leq \pi + \alpha$):

$$Re = \cos\{p \cos(\theta - \alpha)\} - 0.5(X_1 - X_2) \quad (4) \quad Im = \sin\{p \cos(\theta - \alpha)\} - 0.5(X_1' - X_2') \quad (5)$$

回折領域 ($\pi + \alpha \leq \theta \leq 2\pi$):

$$Re = 0.5(X_1 + X_2) \quad (6) \quad Im = 0.5(X_1' + X_2') \quad (7)$$

Fresnel 積分の関数近似^{*}は次式のとおりである。

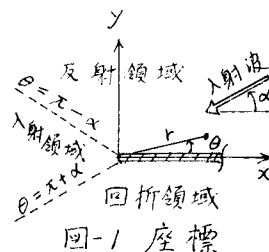


図-1 座標

$$C(\sigma) = \frac{1}{2} + f(\sigma) \sin \frac{\pi}{2} \sigma^2 - g(\sigma) \cos \frac{\pi}{2} \sigma^2 \quad \text{--- (8)}$$

$$S(\sigma) = \frac{1}{2} - f(\sigma) \cos \frac{\pi}{2} \sigma^2 - g(\sigma) \sin \frac{\pi}{2} \sigma^2 \quad \text{--- (9)}$$

$$f(\sigma) = \frac{1 + 0.926\sigma}{2 + 1.792\sigma + 3.104\sigma^2} + \varepsilon(\sigma)$$

$$g(\sigma) = (2 + 4.142\sigma + 3.492\sigma^2 + 6.670\sigma^3)^{-1} + \varepsilon(\sigma)$$

$$|\varepsilon(\sigma)| \leq 2 \times 10^{-3}$$

Fresnel 積分の副プログラムおよび半無限防波堤周辺の波高比を求める主プログラムのフローチャートを右に示す。

3. 波峰線と等位相線

1つの点源または線源から発生する円筒波または平面波の波峰線と等位相線は一致するが、2つ以上の点源、線源からの波が重なった場合の波峰線と等位相線は一般に一致しない。このことは、入射波 $g_0 = \exp\{i p \cos(\theta - \alpha)\}$ と反射波 $g_1 = \exp\{i p \cos(\theta + \alpha)\}$ が重なった斜め重複波

$$g_0 + g_1 = 2 \cos(kx \sin \alpha) \cdot \exp(i k x \cos \alpha)$$

で明白である。すなわち、偏角が位相であるから、この場合の等位相線は $kx \cos \alpha = \text{const.}$ 、すなわち、壁面に直角な直線群になる。波峰線を求めるには、実部のみ（振幅1、すなわち波高2の入射波がある場合の水位を表わす。波高1の入射波に対する水位を求める

には実部を2で割ればよい）を計算し、その極大値を連ねればよい。図-2は入射角 α が 170° の場合の半無限防波堤沖側海域における波峰線を式(2)および(4)により求めた例である。このような線形理論でも、マッハ型反射波のような波峰線様相が出現する。

最後に、Fresnel 積分の関数近似式と文献を御教示頂いたジャパ・ビジネス・オートメーションの深田一郎主査に厚く感謝する。

参考文献

Handbook of mathematical functions with formulas, graphs, and mathematical tables, 5. edited by Abramowitz M. and I.A. Stegun, Dover Pub., 1965, pp. 300~302

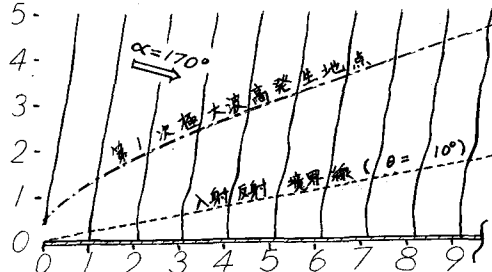


図-2 半無限防波堤沖側の波峰線

主プログラム

入射角 α°

度 → ラジアン

座標角 θ°

度 → ラジアン

r/L

$p = 2\pi r/L$

$\sigma = 2\sqrt{p/\pi} \cos \frac{\theta - \alpha}{2}$

(副プログラム) →

⑧ = $1 - C - S$

⑨ = $C - S$

$\sigma' = 2\sqrt{p/\pi} \cos \frac{\theta + \alpha}{2}$

(副プログラム) →

⑤ = $1 - C' - S'$

⑩ = $C' - S'$

$X_1 = \text{⑧} \cos p \cos(\theta - \alpha) + \text{⑨} \sin p \cos(\theta - \alpha)$

$X_1' = -\text{⑨} \cos p \cos(\theta - \alpha) + \text{⑧} \sin p \cos(\theta - \alpha)$

↓ 2

↓ 2

$X_2 = \text{⑤} \cos p \cos(\theta + \alpha) + \text{⑩} \sin p \cos(\theta + \alpha)$

$X_2' = -\text{⑩} \cos p \cos(\theta + \alpha) + \text{⑤} \sin p \cos(\theta + \alpha)$

△ $\theta \leq \pi + \alpha$ yes

$0.5 \sqrt{(X_1 + X_2)^2 + (X_1' + X_2')^2}$

△ $\theta \leq \pi - \alpha$ yes

$\cos p \cos(\theta - \alpha) - \frac{X_1 - X_2}{2}$

$\left\{ \cos p \cos(\theta - \alpha) + \cos p \cos(\theta + \alpha) - \frac{X_1 + X_2}{2} \right\}^2 + \left\{ \sin p \cos(\theta - \alpha) + \sin p \cos(\theta + \alpha) - \frac{X_1' + X_2'}{2} \right\}^2$

△ $\alpha = 0^\circ$ yes

△ $\alpha = 360^\circ$ yes

× 0.5 =

7° リント

$r/L = r/L + 0.2$

↓ 3

3

3

3

3

3

3

3

3

3

3

3

3

3

3

3

3

3

3

3

3

3