波動伝播数値解析のための数値積分法に関する検討

山口大学工学部　中川浩二

1. はじめに

構造物の動的応答の解析は，ダム，原子力発電施設，海洋構造物，橋梁構造物などの地震，風，波等の外力に対する安全性の検討のためからも実際面で広く実施されてきている。　しかし，構造物への入力が衝撃的な過渡応力である場合には固体の衝突や発破，爆発などによる応力波の発生等多くの現象がみられるにもかかわらず必ずしも一般的ではない。　衝撃的荷重を受ける構造物あるいは構造要素中の波動伝播問題には次のような特徴がある。

1). 衝撃的エネルギーが系に入力されてからその大部分が系外へ去るあるいは重要でなくなるまでの時間間隔は短かい。

2). 差分法，有限要素法などの通常の数値計算法によるとき，step 入力によるオーバーシュートの誤差は大きく，そのstep 荷重の大きさの30%にも及ぶ。

固体の衝突あるいは発破衝撃により発生した応力波による構造物等の破壊の検討を行なおうとするとき，等断面等材質の棒の衝突により発生する応力はstep 状であり，また通常の爆薬の爆発による衝撃波の立ち上りは数μsecであり，岩盤中を伝播する時間とくらべてこれもstep状の扱いが必要となるであろう。

本研究は以上のことを考慮し，step 荷重を受ける構造物あるいは構造要素中の波動伝播を解析するための手法について検討する。

2. 波動伝播解析のための数値積分法

数値積分スキームにおける散逸性は振動問題の解析を主とする一般の動的問題の解析では減衰等の点に好ましくないとされるようである。　しかし過渡的な波動伝播問題においては衝撃的エネルギーが系に入力されてからその大部分が系を通りすぎるまでの時間が短かく，減衰による誤差はオーバーシュートによるそれとくらべて小さいとすることができよう。　このことを考慮し，多数提案されている数値積分法の中から最も計算時間が短かいと思われる中央差分法とモードによる減衰を操作可能なNewmarkの方法について検討を行なう。

1次元の波動方程式は

$$\partial^2 U/\partial t^2 = c^2 \partial^2 U/\partial x^2$$

で与えられる。　これを時間，空間ともに差分表示すれば

$$(u_j^{n+1} - 2u_j^n + u_j^{n-1})/\Delta t^2 = c^2 (u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n)/\Delta x^2$$

となる。　差分方程式の初期条件を $u_j^0 = Ae^{ibj\Delta x} = Ae^{ij\xi}$ $(b\Delta x = \xi)$ とすると一般解は $u_j^n = z^n e^{ij\xi}$ の形となり次の形の特性方程式が得られる。

$$z^2 - 2\{1+\lambda^2(\cos\xi - 1)\}z + 1 = 0 \qquad (\lambda = c\Delta t/\Delta x)$$

この特性方程式の根は $1+\lambda^2(\cos\xi - 1) = \cos\alpha$ とおくことにより $z = e^{\pm i\alpha}$ として与えられしたがって中央差分スキームの一般解は

$$u_j^n = (e^{\pm i\alpha})^n e^{ib\xi} = e^{ib(j\Delta x \pm \frac{n\alpha}{b})}$$

となり，$|z| = 1$ であることよりスキームの減衰はなく，さらに位相速度が $\alpha/b\Delta t$ で与えられることがわかる。

Newmarkの方法のスキームは次のようにあらわされる。

$$u^{n+1} = u^n + \dot{u}^n \Delta t + (\tfrac{1}{2} - \beta)\ddot{u}^n \Delta t^2 + \beta \ddot{u}^{n+1} \Delta t^2$$

$$\dot{u}^{n+1} = \dot{u}^{n} + (1-\gamma)\ddot{u}^{n}\Delta t + \gamma\ddot{u}^{n+1}\Delta t$$

上式に従って $\dot{u}^n$, u^n を作り, $u^{n+1}-u^n$ の差式より速度項を消去すると次式が得られる。

$$u^{n+1} - 2u^{n} + u^{n-1} = \Delta t^2\left\{\beta\ddot{u}^{n+1} + \left(\gamma+\frac{1}{2}-2\beta\right)\ddot{u}^{n} + \left(\frac{1}{2}-\gamma+\beta\right)\ddot{u}^{n-1}\right\}$$

$A = 1-2\beta\alpha\lambda^2$, $B = 1+(\gamma+\frac{1}{2}-2\beta)\alpha\lambda^2$, $C = 1-(1-2\gamma+2\beta)\alpha\lambda^2$ $(\alpha = \cos\xi - 1)$ とおき, 先にならって特性方程式の根を求めると

$$z = \{B \pm \sqrt{B^2-AC}\}/A = \sqrt{C/A}\,e^{\pm i\theta} \qquad \theta = \left|B/\sqrt{AC} \pm i\sqrt{AC-B^2}/\sqrt{AC}\right|$$

となる。したがって一般解は

$$u_j^n = \left(\sqrt{C/A}\right)^n e^{ib\left(j\Delta x \pm \frac{n\theta}{b}\right)}$$

となり散逸特性は

$$z^2 = C/A = \frac{1+4\lambda^2\left(\frac{1}{2}-\gamma+\beta\right)\sin^2\frac{\xi}{2}}{1+4\beta\lambda^2\sin^2\frac{\xi}{2}}$$

となり. 位相速度は

$$c = \frac{\theta}{b\Delta t} = \frac{1}{b\Delta t}\cos^{-1}\left(B/\sqrt{AC}\right)$$

となる。散逸特性ならびに位相速度を $\lambda=0.5$ の場合について求めたものが図-1 および図-2 である。

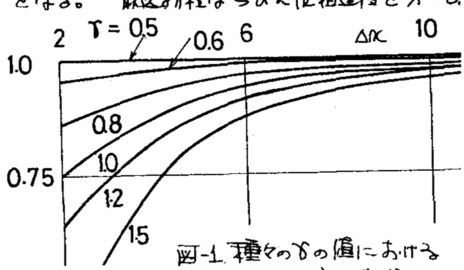

図-1 種々のγの値における波長と減衰の関係

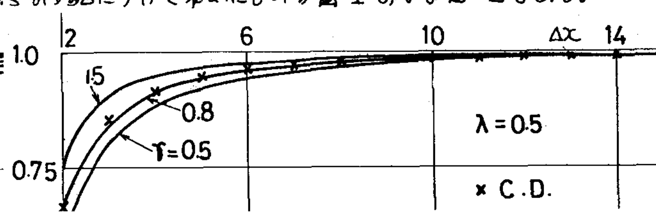

図-2 種々のγの値における波長と位相速度との関係

3. 数値計算と検討.

紙面の都合上ここでは一次元問題についてのみ示す。図-3 に棒端に step 荷重が入力してから 10, 20, 40 時間ステップにおける棒中の応力波形を示す。減衰のない($\gamma=0.5$)スキームでは応力の振動はなくなることなく続く。波頭通過のオーバーシュートの大きさは伝播とともにほとんど減衰しない。γの値が増加すると波頭直後のオーバーシュートは伝播とともに小さくなり, それに続く応力の振動も小さくなる。波頭部分の応力勾配の低下をできるだけ抑え, かつオーバーシュート, 振動を小さくするために節点においてγの値を順次変化させる。その例として棒端で$\gamma=1.5$とし, 順に1.4, 1.3, ・・・と低下させ, 第8番目以降の節点で$\gamma=0.8$として計算したものが図中の太実線である。

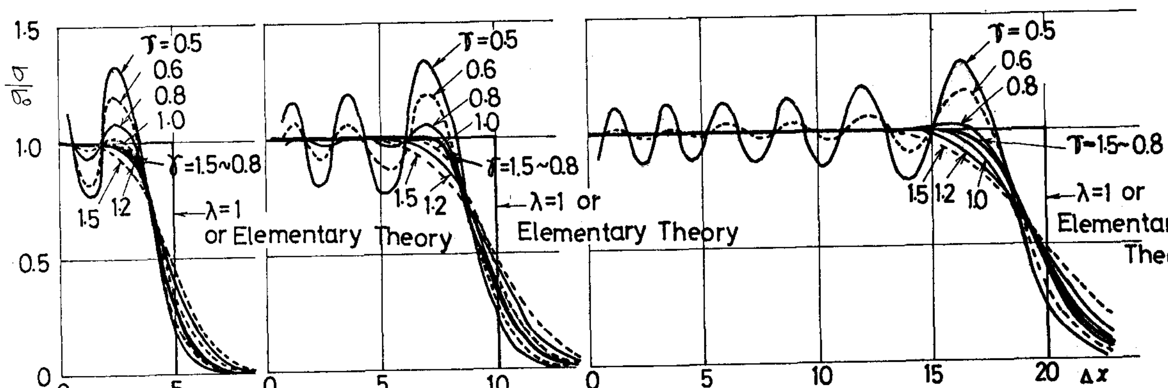

図-3 step荷重入力後 10, 20, 40時間ステップにおける棒中の応力