最適規準法における最適性の検討

愛媛大学工学部　正員　大久保禎二

愛媛大学大学院　学生員　○石原正人

1. まえがき

近年、大規模構造物で剛性制限が支配的な影響を与える最適設計問題を能率的に解くための1方法として最適規準を用いたEnvelope法が提案されている。この方法は剛性制限、応力制限、寸法制限など種々の性質の等号制約条件をそれぞれ独立に考慮して最適規準を導入し、これらの最適規準から得られる各設計変数の最大値を包括して最適解を決定するものであり、昨年、著者の一人がこの考え方にもとづき、図式解法[2]とたわみ制限に関する最適規準とを組み合わせ、さらに桁要素のSuboptimizationの結果を利用して最適使用鋼種をも決定できる鋼I桁の最適設計法を提案した。[1] 最適規準に基づくEnvelope法は、複雑な大規模構造物の最適設計問題を非常に能率的に解くことを可能にし、きわめて実用的な設計法であるが、その最適性を理論的に明確に証明できない欠点を有している。本研究は、昨年著者の提案した鋼I桁の最適設計法を、剛性制限に関して不等号制約条件をも考慮できるようにスラック変数を導入してその最適規準を定式化するとともに、設計法の最適性の吟味、スラック変数導入の意味などを明らかにしようとするものである。

2. 設計法の概要

文献1)で提案した鋼I桁の図式最適設計法および最適規準に基づく最適設計法において許容応力度、座屈剛度、最小寸法制限など、たわみ制限以外の全ての制約条件を満足する鋼I桁の各桁要素の最適使用鋼種 S および断面二次モーメント I は、文献2)より　BM=RBM　として各鋼種の製作費を比較することにより容易に決定することができる。ここに、BMは各桁要素の最大作用曲げモーメント、RBMは最大抵抗曲げモーメント　である。

つぎに、たわみ制限 $\delta \leq \delta_a$ に対する最適規準は、スラック変数 v を導入し、ラグランジュ乗数法により次のように導入される。

$$\delta + v^2 = \delta_a \quad より、\quad \sum_{k=1}^{NM} \bar{e}_k / I_{kS} - \delta_a + v^2 = 0 \tag{1}$$

$$\mathbb{L}(\mathbb{I},\lambda) = \sum_{k=1}^{NM} COST_{kS} \cdot \ell_k + \lambda \cdot \left(\sum_{k=1}^{NM} \bar{e}_k / I_{kS} - \delta_a + v^2 \right) \tag{2}$$

ここに、$\bar{e}_k = \int^{\ell_k} (M_k \bar{M}_k / E) \cdot d\ell_k$，$\lambda$：ラグランジュ乗数，$\ell_k$：桁要素 k の長さ，

I_{kM}：桁要素 k，鋼種 S の断面二次モーメント，$COST_{kS}$：桁要素 k，鋼種 S の単位長さ当りの製作費

最適規準は

$$\partial \mathbb{L} / \partial I_{kS} = C^*_{kS} \cdot \ell_k - \lambda \cdot \bar{e}_k / I^2_{kS} = 0 \tag{3}$$

となり、これより桁要素 k の I_{kS} は次式より求められる。

$$I_{kS} = \frac{1}{(\delta_a - \delta_{\mathbb{I}\sigma} - v^2)} \cdot \sqrt{\frac{\bar{e}_k}{C^*_{kS} \cdot \ell_k}} \cdot \sum_{k=1}^{NM} \sqrt{\bar{e}_k \cdot C^*_{kS} \cdot \ell_k}, \quad ただし、I_{kS} \in \mathbb{I}_\delta \tag{4}$$

ここに、　$\mathbb{I}_\delta = (I_1, \cdots I_m)$　：たわみ制限に対して active な設計変数群

$\mathbb{I}_\sigma = (I_{m+1}, \cdots I_{NM})$：　〃　〃　passive　〃

$\delta_{\mathbb{I}\sigma}$：$\mathbb{I}_\sigma$ によるたわみ量，$C^*_{kS} = \partial COST_{kI} / \partial I_{kI}$ または $\partial COST_{kS} / \partial I_{kS}$

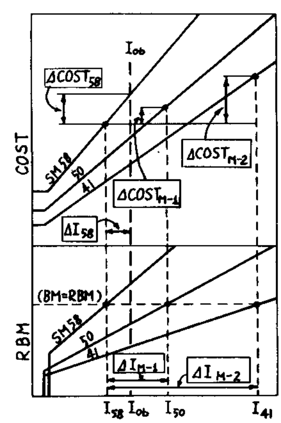

図-1　$\Delta COST_I$，$\Delta COST_S$ の比較

$\mathbb{I}_\delta$，$\mathbb{I}_\sigma$ は、図式解法および式(4)より得られる I の大きさを比較して決定される。また、最も経済的に $\delta \leq \delta_a$ を満足させる $\mathbb{I}_\delta$ およびその鋼種は、$\delta \leq \delta_a$ かつ $BM \leq RBM$ とするために必要とする I および S の変化による製作費の増加量 $\Delta COST_I$，$\Delta COST_S$ を図-1より求め、これらを比較し最も経済的となる変数 I または S を各桁要素について決定し、式(4)に $\mathbb{I}_\delta$ に関する各桁要素の C^*_{kS}、すなわち $\Delta COST_{kI}/\Delta I_{kI}$ または $\Delta COST_{kS}/\Delta I_{kS}$ を代入することにより決定することができる。通常2～3回の繰り返し計算で $\mathbb{I}_\delta$，$\mathbb{I}_\sigma$，$\mathbb{S}$ を一定値に収束させることができる。

3. 設計空間

上記の設計法の最適性を検討するため、図-2に示す単純鋼I桁の最適設計問題を考える。この問題の設計変数は S1, S2, I1, I2 であり、桁要素の使用鋼種を SM(SS)41, SM50, SM58 とし、その全ての組み合わせにおいて BM=RBM のみを考慮した場合の実行可能領域を示すと図-3のようになり、各鋼種の組み合わせにおける最適点はそれぞれ点A, B,　, I となる。図式最適設計法により得られる最適点は

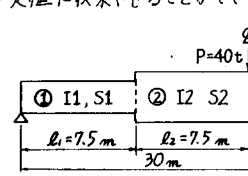

図-2　単純鋼I桁

これらの最適点のうち最小の製作費を与えるE点となる。[2] 一方、設計空間内におけるたわみ制限の実行可能領域は使用鋼種に関係なくI1, I2のみの関数となり、$\delta \leqq \delta_a = 6.0$, 7.4, 8.0 cm に対してそれぞれ図示の領域となる。したがって最適設計問題は、各使用鋼種の組み合わせにおける実行可能領域のうちで最小のI1, I2の組み合わせを決定する混合離散型の最適設計問題となっている。

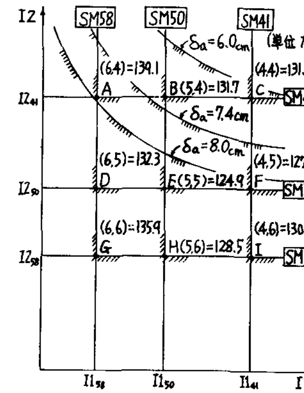

図-3　設計空間

4 最適性の検討

図-4に、δ_a=6.0 cm の場合の2.で述べた方法により最適解を決定するプロセスを示す。まず図式最適設計法より $BM_k = RBM_k$ の条件のみを考慮して点O, (50, 50) を得る。また使用鋼種を (50, 50) とし、たわみ制限に対して I1, I2 を active とした場合、式(4)より点Aを得る。O点と比較してA点のI1, I2ともに大となり、たわみ制限に対して active となっている。次に式(4)において桁要素1および2の使用鋼種をSM50よりSS41に変更した場合の製作費の変化を比較し、最適鋼種として (41, 41) のB点を得る。ここで、たわみ制限に関してI1は passive, I2は active となる。active な要素があるのでスラック変数 $v=0$ としてI2を改良することにより全域的な最適点としてC点を得ることができる。δ_a=7.4 cm の場合は図-5に示すごとく点A (50, 50) より点E (50, 41) へ改良されるが、ここで、たわみ制限に関して I1, I2 共に passive となりE点が全域的な最適点となる。この場合、スラック変数は $v=0.63$, $v^2=0.4$ となり、全ての桁要素のIがたわみ制限に対して passive になった時のみ設計変数の値より従属的に決定され、v^2はたわみ制限に対する余裕値を表わす。また点Eでは、局所的最小点が満足すべき条件 $\partial L/\partial v = 2v\lambda = 0$ より、$\lambda=0$ となり、たわみ制限が inactive であることと一致している。このように鋼種をも設計変数として考慮する最適設計問題では、必ずしも $\delta=\delta_a$ が最適解を与えるとは限らず、ここにスラック変数を導入した意義が存在するわけである。

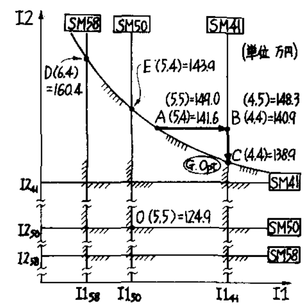

図-4　δ_a=6.0 cm

上記の方法により、ほとんど全てのたわみ制限に対して $\delta=\delta_a$ あるいは $\delta<\delta_a$ となる全域的な最適解が得られることを確認した。しかし、きわめて例外的に δ_a=8.0 cm の場合には上記の方法により得られる解の改良が点A (50, 50)→B (50, 50)→E (50,50) となり、最終的にE点（目的関数値=129.3万円）を得る。しかし、この問題における全域的な最適点はF点であり、E点はF点の目的関数値128.7万円より0.5%大きい値を得ている。この原因はSの改良においてIを一定としていることに起因しているが、Sの改良において、$\delta=\delta_a$ となるように各桁要素のIをも変化させる組み合わせは、桁要素の数の増加に伴い指数関数的に増加し、一般的な方法として実行することは不可能である。混合離散型の最適設計問題において、このような問題点を解決する方法としては、まず近似の最適点を求め、次にその近傍における実行可能離散解の目的関数値を比較検討し、全域的な最適性を確認することが必要である。このためには種々の方法が考えられるが、ここでは上記2.の方法で $\mathbf{I}$, $\mathbf{S}$ を決定した後、さらに各桁要素の鋼種をそれぞれ独立に1桁要素のみ許容応力度の1段階小さな鋼種に変更し、$\delta=\delta_a$ あるいは $\delta<\delta_a$ として各桁要素のIを修正することによるTCOSTの変化を比較検討する方法を用いたが、この方法の改良により上記の δ_a=8.0 cm の場合にも全域的な最適点Fを得ることができた。

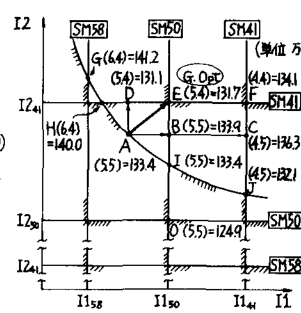

図-5　δ_a = 7.4 cm

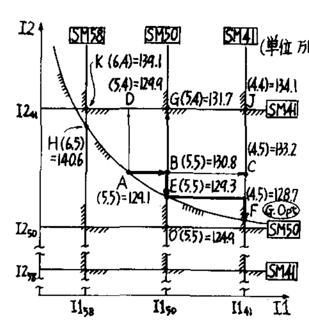

図-6　δ_a = 8.0 cm

〔参考文献〕1) 大久保，稲木：最適規準法の一拡張，土木学会第33回年次講演概要集，1979年9月.

2) 大久保，奥村：図式解法による鋼I桁の最適設計，土木学会論文報告集，第252号，1976年8月.