

Orthotropic Shear-Elastic Plate の座屈解析について

愛媛大学 正員 見沢繁光, 正員 大賀水田生
徳山高専 正員 重松恒美, 正員 原 隆

1. まえがき

ラーメ構造あるいはトラス構造の中空板やサンドイッチ板は、高密度の表板と低密度の芯材を組み合わせた軽量構造荷役である。これは軽量で曲げ剛性が大きいという構造的に有利な断面特性をもち、芯材のせん断剛性が小さくせん断変形が大きいため“Shear-Elastic Plate”として扱われる。本研究では、多くの Shear-Elastic Plate に、巨視的に直交異方性の芯材が用いられることを考慮して、直交異方性の Shear-Elastic Plate の座屈解析を行なう。解析においては伝達トリックス法を用い、直交方向の芯材の剛性比などをパラメータとして、さまざまな境界条件のもとで数値計算を行ない座屈係数を求めた。また、限られた条件のもとで求められた従来の解^{1,2)}との比較検討を行なった。

2. 解析方法

図1に示すように一方向に等分布圧縮荷重を受け、荷重に垂直な二辺が単純支持された直交異方性の Shear-Elastic Plate の断面力のつりあいは、芯材のみの直交異方性を考慮すれば、

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{yx}}{\partial y} - Q_x &= 0, \quad \frac{\partial M_y}{\partial y} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} - Q_y = 0, \quad M_{xy} = M_{yx} \\ \frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} - P_x \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

ここに、 M_x, M_y, M_{xy} ; モーメント, Q_x, Q_y ; せん断力, W ; 変位, P_x ; 等分布圧縮荷重

また、変位と断面力の関係式は、

$$\left. \begin{aligned} M_x &= K \left(\frac{\partial \varphi_x}{\partial x} + \nu \frac{\partial \varphi_y}{\partial y} \right), \quad M_y = K \left(\frac{\partial \varphi_y}{\partial y} + \nu \frac{\partial \varphi_x}{\partial x} \right) \\ M_{xy} &= M_{yx} = \frac{1}{2}(1-\nu) K \left(\frac{\partial \varphi_x}{\partial y} + \frac{\partial \varphi_y}{\partial x} \right) \\ Q_x &= S_x \cdot \gamma_{xz}, \quad Q_y = S_y \cdot \gamma_{yz} \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

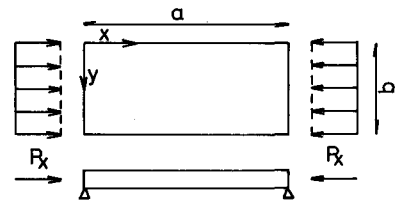


図1 荷重・支持状態

ここに、 K ; 曲げ剛性, S_x, S_y ; せん断剛性, γ_{xz}, γ_{yz} ; せん断ひずみ, ν ; ポアソン比, $\varphi_x = \gamma_{xz} - \frac{\partial W}{\partial x}$, $\varphi_y = \gamma_{yz} - \frac{\partial W}{\partial y}$

図1の支持条件を満足する変位の式は

$$\left. \begin{aligned} W &= \bar{W} \sin \frac{m\pi}{a} x, \quad \varphi_x = \bar{\varphi}_x \cos \frac{m\pi}{a} x \\ \gamma_{yz} &= \bar{\gamma}_{yz} \sin \frac{m\pi}{a} x \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

ここに、 $\bar{W}, \bar{\varphi}_x, \bar{\gamma}_{yz}$ は y のみの関数であり、他の変位、断面力も式(3)を用いて同様にあらわされる。

状態量ベクトルとして

$$Z = \{ \bar{W}, \bar{\varphi}_x, \bar{\varphi}_y, \bar{P}_{xy}, \bar{P}_y, \bar{Q}_y \}^T \quad (4)$$

を定義し、式(3)の関係を用いて式(1), (2)を変形し、下記の無次

$$\left(\frac{m\pi}{a} \right) \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & \sigma \\ 0 & 0 & \nu & 0 & \frac{1}{8(m)^2} \cdot 0 \\ 0 & -1 & 0 & \frac{2}{8(m)^2(1-\nu)} & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \frac{1}{8(m)^2(1-\nu)} & 0 & -\nu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1-\epsilon k & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

図2 係数マトリックス

元量を用いて変換し、

$$\sigma_x = \frac{S_x}{S_y}, \quad \varepsilon = \frac{\pi^2 K}{b^2 S_x}, \quad k = \frac{b^2 D_x}{\pi^2 K}, \quad \zeta = \frac{b}{a} \quad (5)$$

さらに超弾化した状態量 $\bar{\Sigma}$ により表示すれば、

$$\frac{d}{dy} \bar{\Sigma} = A \bar{\Sigma} \quad (6)$$

図2にマトリックス A の成分が示されている。

式(6)の解は、

$$\begin{aligned} \bar{\Sigma} &= \Pi \bar{\Sigma}_0 = e^{Ay} \bar{\Sigma}_0 \\ &= \left[I + Ay + \frac{1}{2!} (Ay)^2 + \frac{1}{3!} (Ay)^3 + \dots \right] \bar{\Sigma}_0 \quad (7) \end{aligned}$$

ここに Π が伝達マトリックスであり、通常は Cayley-Hamilton の原理により求められるが、本研究の場合は A の特性方程式の根が複雑で一般解を作るのが困難なため、式(7)の級数展開を行なう。なお、 A の特性方程式は、Wurmnest²⁾ により求められた式の特別な形に一致しており、また等方性 ($\sigma = S_x/S_y = 1$) の場合には、Cayley-Hamilton の原理を用いて、解析時に伝達マトリックスが求められる。

3. 数値計算結果

式(7)で得られた伝達式より $y=0$ の状態量 $\bar{\Sigma}_0$ と $y=b$ の状態量 $\bar{\Sigma}_b$ を用いて座屈条件式が求められる。(図1参照)

図3、図4に両端単純支持(すなわち両端単純支持)の Shear-Elastic Plate の座屈係数を示す。図3は式(5)の σ 方向の心材のせん断剛性比とヒモ方性の比 σ をパラメータとして、形状比 $1/3$ と座屈係数 k の関係を示している。 ε が一定の場合、 σ が小さく(より方向のせん断剛性が大きい)方が座屈係数が大きくなる。また $\varepsilon = 0.5$, $\sigma = 0.5$ では、せん断座屈の座屈係数 ($k = 1/\varepsilon = 2$) に近い値となっており、図4は、 $1/3$ が無限大のときの σ と k の関係とあらわしている。座屈係数の変化は、 σ が小さく部分でやや大きくなっているが、ほぼ直線変化を示している。図中の黒丸は Plantema による解を示す。なお、他の境界条件に対しても、同様の手順を用いることにより座屈係数が求められている。

4. おわりに

本法で得られた両端単純支持直交異方性 Shear-Elastic Plate の座屈係数は、Plantema¹⁾ の求めた解と同様であり、また、他の境界条件の解については等方性 ($\sigma = 1$) の Shear-Elastic Plate について得られた解が Wurmnest²⁾ の求めた解と一致していることより、本法の解は妥当であると見える。

本研究では、従来より解析が困難であった直交異方性の Shear-Elastic Plate の座屈解析を伝達マトリックス法により機械的に行なうことができた。同様に本法を用いることにより、解析の複雑な、補剛板を有する直交異方性の Shear-Elastic Plate の座屈解析、心材の曲げ剛性を考慮した直交異方性の Shear-Elastic Plate の座屈解析あるいは、多層の Shear-Elastic Plate の座屈解析も比較的容易に行なえるものと思われる。

<参考文献> 1) F.F. Plantema; Sandwich Construction, John Wiley & Sons (1966)

2) W. Wurmnest; Zur Theorie schubelastischer Platten; Stabilität von Rechteckplatten, Darmstadt (1970)

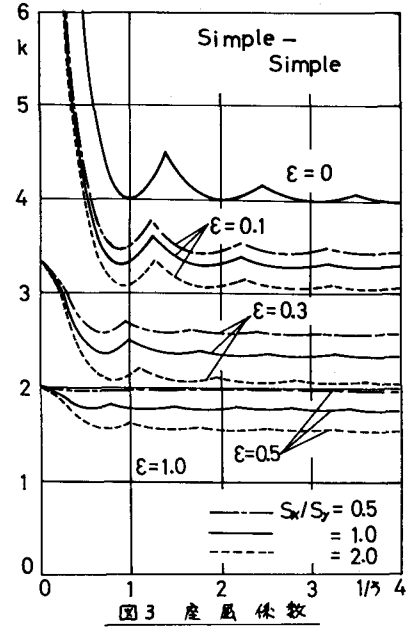


図3 座屈係数

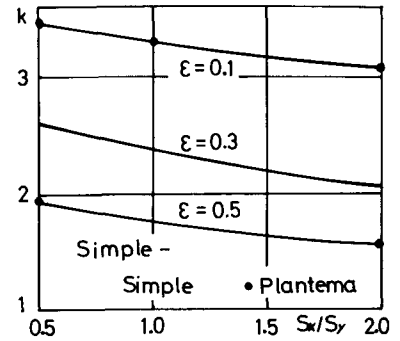


図4 座屈係数