

部分線荷重を受ける矩形板の座屈

阿南信博 正員 桑山ハ洲彦

1 まえがき

板縁の一边,あるいは相対する二辺から部分線荷重を受ける矩形板の座屈については,板面内の座屈直前の膜応力分布を定式化することが困難であるとの理由で,理論解析はほとんどなされず,主として,有限要素法,階差法による数値的手段によって解析されている。しかし,ある程度の結果を得るためには相当な分割を必要とし,この意味で実用的であるとはいえない。ここでは,図-1に示す条件の板を対象として,板面内のつり合い条件,適合条件を同時に満足させる応力関数を多項式と Galerkin 法によって表現し,その精度を確認している。

また,座屈形状関数についても多項式によって近似している。これによって多様な境界条件を持つ板あるいは複合板の座屈をさわめて次数の少ない連立方程式を解くことによって解析可能としている。この意味で本法はより実用的な座屈解析法と思える。

2 解析方法

図-1に示す荷重条件に対して,応力の対称性より応力関数を次式で近似する。

$$F = F_1 + F_2$$

$$= 8a^2 \sum_m \sum_n \phi_{mn} Y_n(y) \cos \frac{m\pi x}{2a} + 8a^2 \sum_m \sum_l \bar{Y}_l(y) \cos \frac{m\pi x}{2a} \quad (1)$$

式中 F_1 は板の上下縁が自由応力縁とし, Y_n はこの条件を満足させる多項式である。 F_2 は板縁の荷重とつり合いを保つ関数で, $\bar{Y}_l$ は線荷重を Fourier 級数展開し,その各項に対してつり合い条件を満足させる多項式である。次に ϕ_{mn} は適合条件を満足させる係数で次式を用いて求める。

$$\sum_n \phi_{mn} \int_{-b}^b (dm^4 Y_n - 2dm^2 \frac{d^2 Y_n}{dy^2} + \frac{d^4 Y_n}{dy^4}) Y_l dy + \sum_l \int_{-b}^b (dm^4 \bar{Y}_l - 2dm^2 \frac{d^2 \bar{Y}_l}{dy^2} + \frac{d^4 \bar{Y}_l}{dy^4}) Y_l dy = 0 \quad (2)$$

$$dm = m\pi/2a$$

式(2)は結果として ϕ_{mn} に関する連立方程式となり m の各項に対して決定される。次節に述べるが,式(2)は n, l の項数は4項でも十分な精度が保障され,数値計算はこの場合4元の連立方程式となるので計算上の問題は生じない。

次に,撓み形状関数として同様に多項式近似として与える。この場合, $x=a, -a$ 縁は単純支持縁とし, y 方向の2辺は任意の境界条件を持つ縁とする。

$$w = \sum_m \sum_n A_{mn} Y_n(y) \cos \frac{m\pi x}{2a} \quad (3)$$

$Y_n(y)$ は単純,固定,自由などの境界条件によって決定される多項式であり,複合板へも拡張可能である。 Y_n に含まれる係数は境界条件と中間条件によって, n の各項に対して求まる。

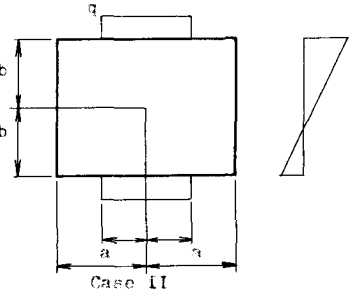
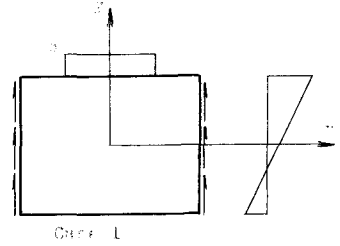


図-1 部分線荷重を受ける板

以上の様に定義した式(1), 式(3)を座屈エネルギー一式に代入し, K_2 法によ, て展開すると次式の A_{mn} に関する固有方程式が得られる。

$$\sum_n \left\{ \left(\frac{R}{\beta} \right)^4 K_{1n} - 4 \left(\frac{R}{\beta} \right)^2 \mu K_{2n} + \frac{16}{\pi^4} K_{3n} + 8 \left(\frac{R}{\pi\beta} \right)^2 (1-\nu) K_{4n} \right\} A_{n\ell} - \bar{K} \sum_m \sum_n A_{mn} \rho_{mn\ell\ell} - \bar{N} \sum_n \left\{ \left(\frac{R}{\beta} \right)^2 \rho E_{1n\ell} + \left(\frac{R}{\beta} \right)^2 \rho E_{2n\ell} \right\} A_{n\ell} = 0 \quad (4)$$

ここで $\bar{K} = 2R(2b)^2/\pi^2 D$ $\bar{N} = \sigma_0 R(2b)^2/\pi^2 D$ R 板厚 $\beta = a/b$, D 板剛度。

また $K_{1n\ell}$, $\rho_{mn\ell\ell}$, $E_{1n\ell}$ などはいずれも各多項式の係数によって表現でき, かつその数値計算は単純である。

3. 解析結果

以上の諸式によ, て解析した結果を

表-1, 2, 3に示しておいた。これらの結果は全て文献に記載されているので比較のため列挙しておいた。

表-1は $\beta=4$ で1辺で等分布荷重が作用している板の底り分布を示している。

	a/b	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0	1.2
		Eq. 4	Ref. 1	Eq. 4	Ref. 1	Eq. 4	Ref. 1
A	Eq. 4	27.040	8.410	5.139	4.202	4.000	4.134
	Ref. 1	27.00	8.41	5.14	4.20	4.00	4.13
B	Eq. 4	9.451	7.693	7.056	7.001	7.305	7.857
	Ref. 1	9.44	7.69	7.05	7.00	7.40	7.83
C	Eq. 4	4.436	1.440	1.136	0.954	0.837	0.759
	Ref. 1	4.40	1.44	1.14	0.95	0.84	0.76

。本法による計算では, 式(1)の n, ℓ は4とし, Fourier級数は $m=10$ とした。表-2は式(4)に於いて, $x=\pm a$ 縁で等分布荷重のみが作用しているときの座屈係数を比較したものである。この場合も4項近似式を用いている。 $y=\pm b$ 縁に於ける条件はA(単結-単結), B(固定-固定), C(自由-単結)である。

表-3は部分縁荷重が一辺のみに作用しているときの単結支持板の座屈係数を比較したものである。一部にやゝ差が生じているが, これは仮定関数が $x=\pm a$ 縁に於いて急激な変化を生じさせていることによる差と思える。表-3は用いた項数は $n=1, 2$ $m=1, 3$ で4元の固有方程式を解いた結果である。以上の様に本法は僅かの項数でも高精度の結果を得ることができる。又多様な境界条件に対応でき, かつ微分方程式の形に拘束を受けない。パラメトリックな解析結果は表表の際に行う。

a/b	λ/b	$\bar{K}$		
		Eq. 4	Ref. 2	Ref. 4
1	0.25	3.541	3.42	3.5
	0.000	4.042	3.90	3.9
	0.75	4.929	4.65	4.6
	1.00	6.270	5.57	5.6
2	0.25	2.465	2.41	2.5
	0.50	2.616	2.59	2.6
	0.75	2.854	2.84	2.9
	1.00	3.163	3.15	3.2
3	0.25	2.449	2.72	
	0.50	2.559	2.43	
	0.75	2.737	2.66	
	1.00	2.979	2.95	

- 1) Timoshenko, S.: Theory of elastic stability, McGraw Hill, 1961.
- 2) Khan, M. Z. and Walker, A. C.: Buckling of plates subjected to localized edge loading, The Structural Engineer, No. 6, 1972.
- 3) Timoshenko, S.: Theory of elasticity, McGraw Hill, 1951.
- 4) Rockey, K. C. and Bagchi, W. S.: Buckling of plate girder webs under partial edge loadings, Int. Jour. of Mech. Sci., Vol. 12, 1970.