エントロピー法におけるバランシングファクターの解釈

福山大学工学部　正会員
近藤勝直

いわゆるエントロピー法と呼ばれているものには、先験確率式を想定するところの「佐佐木のエントロピー法」と、総交通費用一定式を第3番目の制約条件に持つところの「ウィルソンのエントロピー法」などがある。上記2つのエントロピー法はそれぞれその考え方は全く異るものの、解の構造は共通である。両法とも、ラグランジュの未定乗数法による解法途上で定義されるところのバランシングファクターを収束計算によって求めることによりOD交通量を得る。そこで本稿では、先験確率を用いるエントロピー法を中心に、バランシングファクターの諸性質を考えてみることにする。

1. 現在パターン法的エントロピー法（2重制約）

先験確率として現在の単位OD表を用いる場合のエントロピー法は、現在パターン法に位置づけられる。現在OD表を X'_{ij}，現在単位OD表 $p_{ij}=X'_{ij}/T'$，周辺分布の成長率を $F=(F_1,F_2,\cdots,F_i,\cdots,F_N)$，$G=(G_1,G_2,\cdots,G_j,\cdots,G_N)$，将来の周辺分布をそれぞれ $U=(U_1,U_2\cdots U_i\cdots U_N)$，$V=(V_1,V_2\cdots V_j\cdots V_N)$ とするとき、将来における most probable なODパターンは、制約条件

$$(1)\qquad \Sigma_j X_{ij}=U_i \qquad (i=1,2\cdots N)$$

$$(2)\qquad \Sigma_i X_{ij}=V_j \qquad (j=1,2\cdots N)$$

のもとで

$$\frac{T!}{\prod_{ij}(X_{ij})!}\prod_{ij}(p_{ij})^{X_{ij}}\longrightarrow max.$$

の解として得られる。(1),(2)式に対する Lagrangian multipliers をそれぞれ α_i，β_j とするとき

$$(3)\qquad X_{ij}=e^{\alpha_i+\beta_j}\,p_{ij}$$

なる解を得る。さらに $\lambda_i=e^{\alpha_i}/T'$，$\mu_j=e^{\beta_j}$ と置けば、解は次のように簡潔な形で表わすことができる。

$$(4)\qquad X_{ij}=\lambda_i\mu_j X'_{ij}\ .$$

この λ_i $(i=1,2\cdots N)$，μ_j $(j=1,2,\cdots N)$ を我々はバランシングファクターと呼ぶ。(4)式の形から明らかなように、バランシングファクター（以下B.F.と略す）の積 $\lambda_i\mu_j$ は (i,j) ペアに固有な成長率となっている。

この現在パターン法的エントロピー法の解がデトロイト法の解に一致することは既に証明済[1]である。すなわち、デトロイト法においては成長率 F_i，G_j を収束するまで再定義して乗算してゆくのであるが、その収束計算のプロセスが、B.F.を求解するプロセスと全く同じなのである。B.F.の求解は、(4)式を(1),(2)式に代入し、それを $\lambda=(\lambda_1,\lambda_2\cdots\lambda_i\cdots\lambda_N)$，$\mu=(\mu_1,\mu_2\cdots\mu_j\cdots\mu_N)$ について反復計算で求めるのである。他方、デトロイト法が第n回目に収束判定基準を満したものとすれば、結局、次式が成立する。

$$(5)\qquad \begin{aligned}\lambda_i&=F_iF_i^{(1)}F_i^{(2)}\cdots\cdots F_i^{(n)}\ ,\\ \mu_j&=G_jG_j^{(1)}G_j^{(2)}\cdots\cdots G_j^{(n)}\ .\end{aligned}$$

ここに、$F_i^{(k)}$，$G_j^{(k)}$ は第k回目の修正成長率である。また、デトロイト法では通例、全域の成長率なるものを用いるのであるが、それは本質的ではないので省略している。

2. 現在パターン法的エントロピー法（1重制約）

本項では1重制約のケースを考えてみる。すなわち、将来の周辺分布は着側の $V=(V_1,V_2\cdots V_j\cdots V_N)$ のみが既知で、発側の U は未知、そしてODパターンの先験確率が現在の単位OD表に等しいとみなす場合の

エントロピー法を考えてみよう。 この場合の解は、先と同様の手続きを経て、(4)式に対応して

(6) $X_{ij} = \mu_j X'_{ij}$

と導かれる。この X_{ij} は(2)式を満足しなければならない。すなわち

$$\sum_i X_{ij} = \sum_i (\mu_j X'_{ij}) = \mu_j \sum_i X'_{ij} = \mu_j V'_j \equiv V_j .$$

結局、$\mu_j = V_j / V'_j \equiv G_j$、B.F. μ_j はゾーンjの集中交通量の成長率に他ならない。したがって発生交通量は

(7) $U_i = \sum_j X_{ij} = \sum_j (G_j X'_{ij})$

として求められる。

3. 重力モデル的エントロピー法

—— 佐佐木のエントロピー法 ——

この問題は先験確率が重力型式であれば、いかなる形式であろうとも、すなわち、先験確率の一般形を

(8) $p'_{ij} = \alpha U_i^{\beta} V_j^{\delta} t_{ij}^{-\gamma}$

で表わすとき、パラメータ β と δ がいかなる値であれ、解は次のような形で表わすことができる。

(9) $X_{ij} = \lambda_i \mu_j t_{ij}^{-\gamma}$.

この場合も同様に、B.F. λ_i と μ_j は(1),(2)式から定めることができるが、λ_i と μ_j のいずれか一方は消去することができるので、最終的に解は

(10) $X_{ij} = \dfrac{\mu_j t_{ij}^{-\gamma}}{\sum_k \mu_k t_{ik}^{-\gamma}} U_i$

又は

(11) $X_{ij} = \dfrac{\lambda_i t_{ij}^{-\gamma}}{\sum_k \lambda_k t_{kj}^{-\gamma}} V_j$

で表現することができる。(10)式の場合は(2)式が、(11)式の場合は(1)式が満足されるようにB.F.が決定される。(10)式の解は、距離関数が $t_{ij}^{-\gamma}$ である場合のVoorhees型修正重力モデルと全く等価である。[2)] この場合、B.F.の絶対的大きさは重要でない。相対的大きさが重要である。(10)式右辺の U_i にかかる分数は発生量 U_i を各ゾーンにばらまく遷移確率を表わしており、その分子はアクセシビリティの形式を有していることから、μ_j はゾーンjの持つ吸引力に関係した性格を持っているものと推察される。[(11)式の λ_i の場合は発生力]

4. 土地利用モデルへの指針

ところで、(11)式を(1)式に代入すると次式を得る。

(12) $\sum_j \left[\dfrac{\lambda_i t_{ij}^{-\gamma}}{\sum_k \lambda_k t_{kj}^{-\gamma}} V_j \right] = U_i$.

これは又次のように変形される。

(13) $\lambda_i \sum_j \left[\phi_j \dfrac{V_j}{t_{ij}^{\gamma}} \right] = U_i$,

ここに $\phi_j = 1 / \sum_k \lambda_k t_{kj}^{-\gamma}$.

いうまでもなく(12),(13)式はOD分布の単なる制約条件式にすぎないのであるが(13)式のような形に分解してみると、ポテンシャルを用いる土地利用モデル(いわゆるLowryモデルの中の世帯配置式)に類似した構造を有していることが分る。(Lowryの場合は $N_i = g \sum_j E_j / t_{ij}^{\gamma}$, N: 世帯, E: 雇用)[3)]

この(13)式によって将来の世帯配置を推計することができれば それはOD分布(この場合は通勤トリップ)が重力モデルに従がう場合のmost probableな世帯配置を与えることになろう。

<手順>

・現況の U_i, V_j そして γ を得て λ_i を連立方程式より解く。
・λ_i の要因分析を行なう。不可なら将来にわたり不変とする。
・将来の V_j (従業者配置)を得て(13)式より U_i (世帯配置)を予測する。

参考文献

1). 佐佐木綱, 近藤勝直, "最適化問題としての現在パターン法", ノート, 土木学会論文報告集 No.272, 1978.
2). 近藤勝直, "分布交通量推計モデル再考", 「交通工学」, Vol.12-No.3, 1977.
3) Lowry, I.S. "A Model of Metropolis", RAND, 1964.