有限振幅波理論による波の水粒子の軌跡について

愛媛大学 正会員 山 口 正 隆

1、緒 言：一様水深上での有限振幅波理論にはすでにStokesが指摘したように、波速が基礎方程式から一義的に決定されず、そのために波速に対するStokesの第1定義および第2定義といわれる物理的条件が必要であるという問題点がある。著者らはこの点に注目して有限振幅波理論の追計算を行うとともに、波速の定義に起因する波特性の相違を考察した。ひきつづき、ここでは、同様の立場から第1定義および第2定義によるStokes波およびクノイド波の水粒子の軌跡の計算を行い、両定義を用いた有限振幅波理論に基づく水粒子の軌跡および質量輸送速度の特性について若干の考察を加えることにする。

2、軌跡の計算方法：いま、ある特定の水粒子の速度（Lagrange座標）がその位置における速度場での速度（Euler座標）に等しいとし、また、水粒子の$t=0$での初期位置（x_0、z_0）からの水平および鉛直変位を（$\xi(t)$, $\zeta(t)$）とすると、次式が成立する。

$$dx/dt=\partial\phi(x_0+\xi(t),z_0+\zeta(t);t)/\partial x,\quad dz/dt=\partial\phi(x_0+\xi(t),z_0+\zeta(t);t)/\partial z \qquad (1)$$

式(1)は非線型の連立常微分方程式であるので、厳密解を解析的に導くことは不可能である。そこで、ここでは、初期位置からの変位が小さいという仮定のもとに、式(1)の右辺をξおよびζに関して級数展開し、そこに含まれる微小パラメーターの次数に応じて逐次的に解を求めていく方法と式(1)を数値的に積分する2つの方法を用いて、水粒子の軌跡を求めることにする。

3、Stokes波理論による水粒子の軌跡の計算：式(1)の右辺にStokes波の第3次近似解を用い、そこに含まれる微小パラメーターλの3次の項まで考慮して式(1)を$t=0$で$\xi=\zeta=0$の初期条件のもとに解けば、水粒子の軌跡は水平方向および鉛直方向に対してそれぞれ次式のように表わされる。

$$\begin{aligned}kx=&kx_0-\lambda A_{11}\cosh\theta\{\sin\alpha-\sin\alpha_0\}-\lambda^2[(A_{02}+1/2A_{11}^2\cosh2\theta)(\alpha-\alpha_0)+(A_{22}\cosh2\theta-1/4A_{11}^2)\\&\{\sin2\alpha-\sin2\alpha_0\}+1/2A_{11}^2\{\sin(\alpha+\alpha_0)-\sin2\alpha_0\}-1/2A_{11}^2\cosh2\theta\sin(\alpha-\alpha_0)]+\lambda^3[\{(A_{11}A_{02}+1/4A_{11}^3\cosh\theta+\\&1/4A_{11}^3\cosh3\theta\}(\alpha-\alpha_0)\cos\alpha+1/2A_{11}^3\{\cosh3\theta-\cosh\theta\}(\alpha-\alpha_0)\cos\alpha_0+\{1/4A_{11}^3-A_{11}A_{22}\}\cosh\theta\{\sin(2\alpha+\alpha_0)\\&-\sin3\alpha_0\}+\{1/2A_{11}A_{22}-1/8A_{11}^3)\cosh3\theta+1/8A_{11}^3\cosh\theta\}\{\sin(\alpha-2\alpha_0)+\sin\alpha_0\}-(1/4A_{11}^3+1/2A_{11}A_{22})\cosh\theta\\&\{\sin(\alpha+2\alpha_0)-\sin3\alpha_0\}-\{A_{33}\cosh3\theta+(1/12A_{11}^3-5/6A_{11}A_{22})\cosh\theta\}\{\sin3\alpha-\sin3\alpha_0\}+\{A_{11}A_{22}\cosh3\theta\\&-1/4A_{11}^3\cosh\theta\}\{\sin(2\alpha-\alpha_0)-\sin\alpha_0\}-\{(5/8A_{11}^3+5/2A_{11}A_{22})\cosh3\theta+(A_{11}A_{02}+A_{13}-5/8A_{11}^3)\cosh\theta\}\\&\{\sin\alpha-\sin\alpha_0\}]\end{aligned}\qquad(2)$$

$$\begin{aligned}kz=&kz_0+\lambda A_{11}\sinh\theta\{\cos\alpha-\cos\alpha_0\}+\lambda^2[A_{22}\sinh2\theta\{\cos2\alpha-\cos2\alpha_0\}-1/2A_{11}^2\sinh2\theta\{\cos(\alpha-\alpha_0)-1\}]\\&+\lambda^3[\{1/4A_{11}^3\sinh3\theta+(A_{02}A_{11}-1/4A_{11}^3\sinh\theta)\}(\alpha-\alpha_0)\sin\alpha+\{(3/8A_{11}^3+3/2A_{11}A_{22})\sinh3\theta+(A_{11}A_{02}+A_{13}-3/8A_{11}^3)\\&\sinh\theta\}\{\cos\alpha-\cos\alpha_0\}+(A_{33}\sinh3\theta-1/2A_{11}A_{22}\sinh\theta)\{\cos3\alpha-\cos3\alpha_0\}+\{(1/8A_{11}^3-1/2A_{11}A_{22})\sinh3\theta\\&-1/8A_{11}^3\sinh\theta\}\{\cos(2\alpha_0-\alpha)-\cos\alpha_0\}+3/2A_{11}A_{22}\sinh\theta\{\cos(2\alpha_0+\alpha)-\cos3\alpha_0\}-A_{11}A_{22}\sinh3\theta\}\cos(2\alpha\\&-\alpha_0)-\cos\alpha_0\}]\end{aligned}$$

ここに、$\theta=k(h+z_0)$、$\alpha=k(x_0-ct)$、および、$\alpha_0=kx_0$、である。 (3)

式(2)および式(3)から明らかなように、第3次近似解まで水粒子の軌跡を求めれば、その振幅は時間の経過とともに、単調に増大することになる。これは上記の解析方法では不可避的に現われる。したがって、波による質量輸送速度の定義が不明確になるので、一応第2次近似解の質量輸送速度を示せば、次式のようになる。

$$U_m=\{A_{02}+1/2A_{11}^2\cosh2\theta\}\lambda^2C \qquad (4)$$

式(4)はStokes波の第2次近似解から求められた通常の結果と形式上一致するが、この結果に含まれるz_0は平均位置を意味しているのに対して、式(4)では初期位置を意味することになる。したがって、数値計算の上では両者の値は異なるが、解析解の上ではλ^2のオーダーで一致することになる。式(4)を水底から水面まで積分すれば明らか

なように、第2定義の場合の全質量輸送量は0になる。また、少なくとも、第2次近似解に対しては、平均位置を用いた軌跡の表示式と初期位置を用いたそれが一致することを解析的に示すことができる。

4、クノイド波理論による水粒子の軌跡の計算：式(1)の右辺に第1定義によるChappelearのクノイド波の第2次近似解を用いれば、水粒子の軌跡は水平および鉛直方向に対してそれぞれ次式のように表わされる。

$$x=x_0-(T\sqrt{gh}/2K)[L_0[-e(\gamma-\gamma_0)+\{E(\gamma)-E(\gamma_0)\}]-5L_0L_3[e(\gamma-\gamma_0)-\{E(\gamma)-E(\gamma_0)\}]$$
$$+L_0^2[-(\gamma-\gamma_0)(K^2e\,sn^2\gamma+2/3e+1/3-1/3K^2+5/3eK^2)+\{E(\gamma)-E(\gamma_0)\}(K^2sn^2\gamma-e+2+K^2)$$
$$+3/4K^2(1+z_0/h)^2(sn\gamma\,cn\gamma\,dn\gamma-sn\gamma_0\,cn\gamma_0\,dn\gamma_0)]] \qquad (5)$$

$$z=z_0-(T\sqrt{gh}\,K^2/K\sqrt{3L_0})(1+z_0/h)\{3/4L_0^2(sn^2\gamma-sn^2\gamma_0)+3/16(1+z_0/h)^2L_0^3\{2(1+K^2)(sn^2\gamma-sn^2\gamma_0)$$
$$-3K^2(sn^4\gamma-sn^4\gamma_0)]+3/4L_0^3(2+K^2-e)(sn^2\gamma-sn^2\gamma_0)+15/4L_0^2L_3(sn^2\gamma-sn^2\gamma_0)+3/4L_0^3K^2sn^2\gamma_0$$
$$(sn^2\gamma-sn^2\gamma_0)+3/2L_0^3[e(\gamma-\gamma_0)-\{E(\gamma)-E(\gamma_0)\}]sn\gamma\,cn\gamma\,dn\gamma] \qquad (6)$$

ここに、$\gamma=(2K/L)(x_0-ct)$、$\gamma_0=2Kx_0/L$、$E(\gamma)=\int_0^{\gamma}dn^2\gamma d\gamma$、および$e=E/K$、である。

一方、第2定義によるクノイド波の第2次近似解を用いた鉛直変位は、2次のオーダーでは第1定義による結果と一致するので、省略し、水平変位についてのみ示せば、次式のようである。

$$x=x_0-(T\sqrt{gh}/2K)\{L_0[-e(\gamma-\gamma_0)-\{E(\gamma)-E(\gamma_0)\}]-5L_0L_3[e(\gamma-\gamma_0)-\{E(\gamma)-E(\gamma_0)\}]$$
$$+L_0^2[-(\gamma-\gamma_0)(K^2e\,sn^2\gamma+2e+K^2e-e^2)+\{E(\gamma)-E(\gamma_0)\}(K^2sn^2\gamma-e+2+K^2)+3/4K^2(1+z_0/h)^2$$
$$(sn\gamma\,cn\gamma\,dn\gamma-sn\gamma_0\,cn\gamma_0\,dn\gamma_0)]] \qquad (7)$$

式(5)～(7)は$t=0$で$\xi=\zeta=0$として求めたものであるが、任意時刻$t=t_0$における水粒子の位置を$(x_0、z_0)$とした場合にも$\gamma_0=(2K/L)(x_0-ct_0)$とすれば、成立する。

式(5)および(7)において、$\gamma=(2Kx_0/L)-2K$ および$E(\gamma)=E(\gamma_0)-2E$ を考慮すれば、第1定義および第2定義のクノイド波理論から導かれる質量輸送速度はそれぞれ次式になる。

$$U_m=-1/3L_0^2\sqrt{gh}\{3e^2+(1-K^2)+2e(K^2-2)\} \qquad (8)$$

$$U_m=0 \qquad (9)$$

すなわち、第2定義を用いたクノイド波の第2次近似解によれば、質量輸送速度は0になる。また、式(8)はクノイド波の質量輸送速度のみを求めたIsaacsonの結果と一致するが、Le Méhautéの結果と一致しない。これはLe Méhautéの計算ではより高次の項の影響まで含められているためと考えられる。さらに、式(6)は周期関数になっているので、第2定義を用いたクノイド波の第2次近似解による水粒子の軌跡は微小振幅波理論による結果と同様に閉じることになる。

5、数値解法による水粒子の軌跡の計算：常微分方程式の数値解法として2、3の手法が提　されているが、ここでは最もよく使用されるRunge-Kutter-Gill法を用いて、$t=0$で$\xi=\zeta=0$の初期条件のもとに、式(1)の数値積分を行った。数値計算では、まず一周期を20分割および40分割して計算を行い、両者を比較した結果、一致したので、一周期を20分割することにした。なお、初期位置として$x_0=0$を用いた。ただし、水粒子の速度として有限振幅波理論の近似解を用いるかぎり、鉛直方向の水粒子の軌跡が周期的にならないことや、第2定義による結果に波の進行方向への質量輸送が現われることなど物理的におかしい結果が生じるので、式(1)の非線型連立常微分方程式を厳密に解くことが、必ずしも意味あることではないと考えられる。

5、結　語：以上、両定義を用いた有限振幅波理論に基づいて、水粒子の軌跡および質量輸送速度の特性を若干の考察を行ったが、紙数の都合上、数値計算結果などについては省略したので、講演時に述べるつもりである。

最後に、本研究の実施にあたり、御指導賜った京大防災研究所土屋義人教授ならびに計算および図の作成に助力願った松井嘉彦氏（アジア航測K.K.）と愛媛大工学部大福学技官に謝意を表明する。