

開水路漸拡流の流速分布特性について

徳島大学 正員 岡部 健士
同 正員 杉尾 捨三郎

1. まえがき

本研究は貯水池の堆砂過程の解析に関する研究の一環として行なわれたものであることを付記する。

開水路漸拡流の流速分布形は、diffuser flow と同様に平行流のものとは多少とも異なるであろう。平野らの実験によれば、流下距離に対する水深の増加割合が $1/100$ を越ると、流速分布を等流対数則で近似することに無理が生じてくるのが解る。これは一般に行なわれている等流近似による水理計算法の適用範囲が $\frac{dh}{dx} \leq 1/100$; $\frac{dh}{dx}$ = 水深増加割合、であることを示唆している。貯水池内では上記範囲外の流れが生じる可能性があり、それゆえこの種の流れの流速分布特性を把握しておく必要がある。

本報は、水深のみ漸増する二次元流れを対象にし、摂動法により流速分布特性の定式化を試み、²⁾のちに実験的検討を行なった結果を報告するものである。

2. 解 析

(1)基礎方程式 図-1 は、勾配 θ の路床上の定常二次元漸拡流の模式図である。路床面に沿って x 軸これに垂直に y 軸をとる。また、 x 断面の水深、摩擦速度、および水面流速をそれぞれ h , u_* , U_s とし x , y 両方向の流速成分を u , v とする。

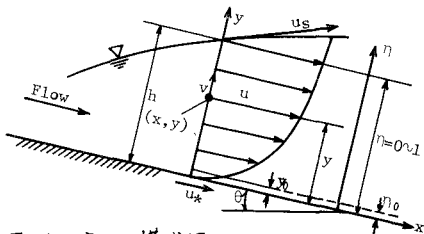


図-1 流れの模式図

図-1 の記号を使って Reynolds 方程式を書き、オーダー比較により微小項を省略すると次式が得られる。³⁾

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = g \left(\sin \theta - \frac{dh}{dx} \right) - \frac{\partial}{\partial y} (\overline{u'v'}) \quad (1)$$

ここに、 $\overline{u'v'}$ は乱れの 2 次モーメントである。

さて、水面での y 方向流速 v は $U_s \cdot \frac{dh}{dx}$ であり、これが v の最大値である。そこで、 v を次式で近似する。

$$v = U_s \cdot \frac{dh}{dx} \cdot \frac{y}{h} \quad (2)$$

また、乱れの 2 次モーメントを Prandtl の混合距離理論に従って書き直すと、混合長 $l = \kappa y$ とし、

$$\overline{u'v'} = \kappa^2 y^2 \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2; \kappa = \text{Karman 定数} \quad (3)$$

(2), (3) 式を (1) 式に代入し、連続条件により変形すると

$$\frac{dh}{dx} \cdot \frac{U_s}{h} \left(y \frac{\partial u}{\partial y} - u \right) = g \left(\sin \theta - \frac{dh}{dx} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left\{ \kappa^2 y^2 \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right\} \quad (4)$$

あるいは、 $\eta = y/h$, $\delta = \frac{dh}{dx}$, $U = u/u_*$, $U_s = U_s/u_*$ なる無次元化を行なえば、

$$\delta \frac{U_s}{2\kappa^2} (\eta U' - U) = \frac{g h}{2\kappa^2 u_*^2} (\sin \theta - \delta) + \frac{1}{2} \{ \eta^2 (U')^2 \}' \quad (5)$$

ただし、 $'$ は $\frac{d}{d\eta}$ を表わす。

さらに、 δ が解に及ぼす影響を明確にするために、(5) 式を断面内で積分した式から $\frac{g h}{2\kappa^2 u_*^2} (\sin \theta - \delta)$ を逆算しそれを (5) 式に代入すると次式を得る。

$$\delta K_1 (\eta U' - U + K_2) = \frac{1}{2\kappa^2} + \frac{1}{2} \{ \eta^2 (U')^2 \}' \quad (6)$$

$$\text{上式において } K_1 = \frac{U_s}{2\kappa^2} \quad (7)$$

$$K_2 = \frac{1}{1-\epsilon_0} \left\{ U_s - \frac{2(1+\epsilon)}{\kappa} \right\} \quad (8)$$

ここに、 ϵ は $\frac{dU}{d\eta} = (1+\epsilon)/\kappa$ としたときに ϵ がもつ断面平均値であり、 ϵ_0 は乱流層の下限高さを表わす無次元量である。ただし、(8) 式は微小項を省略した近似式である。 $\delta = 0$ のとき (6) 式は水深 h 、摩擦速度 u_* の等流における運動式に一致し、これを剪断力一定の仮定で解けば、等流対数則を得る。一方、 $\delta \neq 0$ のときには、非線形となり近似解法にたよらねばならない。本報では摂動法を用いる。この場合、対象となる流れの δ は高々 $1/20 \sim 1/30$ であるので、1 次の解までで十分と思われる。なお (6) 式には U_s という未知量が残っているが、 $U_s = U_{\eta=1}/\cos \theta \approx U_{\eta=1}$ と連立させれば除去でき、 ϵ も求められた解から計算し得るので、解法上の支障は生じない。

最後に、境界条件についてふれておく。無次元化する前の方程式に対する条件は、面の粗滑によらず、

$$y = y_0 \text{ において, } \begin{cases} u = A \cdot u_* \\ u_* = k y^2 \left(\frac{u}{y} \right)^2 \end{cases} \quad (9)$$

なる形式で表わされる。 y_0 は乱流層底面の高さで、滑面および遷移領域の面では粘性底層高さに、粗面では凹凸の平均高さあるいは相当粗度高さと等値してよからう。また、 A は面特性によって決まる係数であるので、平行流のもので代用し得ると思われる。上の条件式を(6)式に適するよう書き直すと以下のようになる。

$$\eta = \eta_0 \text{ において } U = A \quad (11)$$

$$U' = \frac{1}{k} \eta \quad (12)$$

(2). 摂動解 (6)式の解 U が δ のべき級数に展開し得るものとする。と、 U は次式で表わされる。

$$U = U_0 + U_1 \delta + U_2 \delta^2 \dots \quad (13)$$

ここに、 U_i は i 次の摂動解であるが、本報では2次以上は考えない。まず、0次の解を

$$U_0 = \frac{1}{k} \ln \left(\frac{\eta}{\eta_0} \right) + A \quad (14)$$

とおく。これは数学的に正しい解ではないが、等流対数則の信頼性および1次の解の求め易さを考慮して採用することにした。つぎに、1次の解は

$$K_1 (\eta U_0' - U_0 + K_2) = \{ \eta^2 U_0' U_1' \}' \quad (15)$$

$$\text{を、} \eta = \eta_0 \text{ において } U_1 = U_1' = 0 \quad (16)$$

なる条件で解くと得ることができ、次のようになる。

$$U_1 = K_1 \left[(3 + k K_2 - k A) (\eta - \eta_0) - \left\{ \eta + (2 + k K_2 - k A) \eta_0 \right\} \ln \frac{\eta}{\eta_0} \right] \quad (17)$$

また、 $\bar{\varepsilon} = \int_{\eta_0}^{\eta} \varepsilon d\eta = \int_{\eta_0}^{\eta} \delta \cdot k \eta U_1' d\eta$ より、 $\bar{\varepsilon}$ を求めると、微小項を省略して

$$\bar{\varepsilon} = \frac{k K_1 \delta}{1 + k K_1 \delta} \left\{ \frac{\ln \eta_0 + k U_0 - k A}{2} - \frac{1}{4} \right\} \quad (18)$$

となる。さらに、

$$U_{\delta} \approx U_{\eta=1} = -\frac{1}{k} \ln \eta_0 + A + \delta K_1 \left[(3 + k K_2 - k A) \cdot (1 - \eta_0) + \left\{ 1 + (2 + k K_2 - k A) \eta_0 \right\} \ln \eta_0 \right] \quad (19)$$

(14)および(17)~(19)式を利用すれば、 k, u_*, δ が与えられた場合の流速分布を計算することができる。

【参考文献】

- 1) 平野・金子・式：開水路漸拡流の流速分布について、西部支部年講概要集，IV-19，昭49。
- 2) 日野・宮永：波状境界をもつ2次元管路流の解析，土木学会論文集，第264号，1977。
- 3) Hinze, J.O: Turbulence, Chap. 7, 1959。
- 4) Robert & Wilson: Boundary Flow Along A Circular Cylinder, A.S.C.E. Vol. 89, No. HY3, 1963。

3. 実験的検討

勾配 $1/20, 1/80, 1/45$ の路床上にセキ上げ流れ (S_1 曲線) を作り、流速測定を行なった。路床粗度は $k_s = 0.5 \sim 0.7 \text{ mm}$ であったが、 u_* が $0.9 \sim 1.5 \text{ cm/s}$ であったので路面は水理学的には粗滑の遷移領域に属していると思われる。実験結果の一例を図-2, 3に示している。ここに、 u_* は路床上 $y = 0.6 \sim 1.5 \text{ cm}$ の間の流速が次式に従うとして算出されたものである。

$$u/u_* = \frac{1}{k} \ln \left(\frac{u_* y}{\nu} \right) + 3.5 \quad (20)$$

なお、上の定数 3.5 は Robert & Wilson⁴⁾ 提案の図表を参考に決められた。また、図中には、(20)式および摂動解も同時に記入されている。図より、等流対数則では不十分であること、さらに、本報に紹介された諸式による計算値が、かなり実験値に近いことがわかる。ただし詳細については講演時に報告するつもりである。

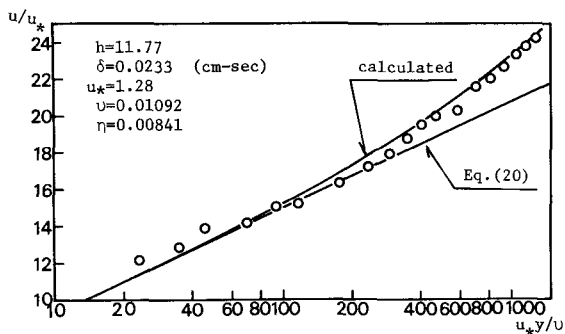


図-2 実験結果の一例および計算値との比較 ($\theta = 1/45$)

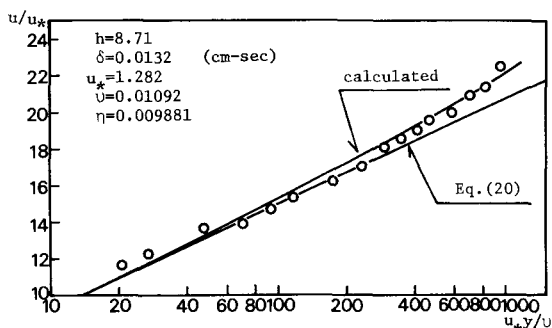


図-3 実験結果の一例および計算値との比較 ($\theta = 1/80$)