

1. まえがき

前報¹⁾において、1個のソース・ノード(水源貯水槽)と m 個のシンク・ノード(末端調圧水槽)から成るトリ一型の管水路系における非定常流れの基礎方程式系の統一的な行列表現を示した。系の応答はこれを適当な方法によって解くことにより求められるが、一般に、制御系の応答のうち減衰に関して、Lyapunov 関数は系の漸近的安定性を示すことが知られている²⁾。そこで、以下では、前報の取扱いに準じて、対象とする管路系の Lyapunov 関数を行列によって統一的に表現し、さらに、その関数の性状を具体的に系の応答の数値計算より考察することにしよう。

2 系の Lyapunov 関数の行列表示

いま、管路系は一般に $(n+1)$ 個の節点と e' 本の枝とから成るトリーで表現され、ソース・ノードは1個、シンク・ノードは m 個あるとする。前報と同様に、これを質量保存の点に関して閉じた系、つまりネットワークに形式上変換し、行列とベクトルについて、木と補木に関する成分をそれぞれ添字 T , C によって区別する。また、得られるネットワークの節点と枝の番号付けも前報と全く同様にすれば、流量ベクトル $\dot{Q}$, エネルギー位ベクトル H , 損失水頭ベクトル H は次のように書かれる。

$$\dot{Q} = \begin{bmatrix} \dot{Q}_T(e') \\ \dot{Q}_{C_1}(m) \\ \dot{Q}_{C_2}(m) \end{bmatrix}, \quad H = \begin{bmatrix} H_1 \\ H_2(m-m) \\ H_3(m) \end{bmatrix}, \quad H = \begin{bmatrix} H_T(e') \\ H_{C_1}(m) \\ H_{C_2}(m) \end{bmatrix} \quad (1)$$

水源貯水槽の水位は一定とし、また、各水槽の水位はエネルギー位に近似的に等しいとみれば、式(1)の流量ベクトルと損失水頭ベクトルは次のように表わされることは明らかである。

$$\dot{Q}(e'+2m) = \begin{bmatrix} \dot{Q}_T(e') \\ \dot{Q}_{C_1}(m) \\ S(m,m)\dot{\Phi}_3(m) \end{bmatrix}, \quad \dot{H}(e'+2m) = \begin{bmatrix} L(e',e')\ddot{Q}_T(e') + 2K(e',e')|\dot{Q}_T(e',e')|\dot{Q}_T(e') \\ \dot{\Phi}_3(m) \\ \dot{\Phi}_3(m) \end{bmatrix} \quad (2)$$

ここに、 S : 末端調圧水槽の断面積を表わす対角行列、 L : 各管路の $\rho l/ga$ を表わす対角行列、 K : 各管路の $f l/2g D a^2$ を表わす対角行列、である。

ところで、一般に、Kirchhoff の第一、第二法則を満足する物理系に対しては、Tellegen の定理が成立し

$$\dot{Q}^*(e'+2m) \cdot \dot{H}(e'+2m) = 0 \quad (3)$$

である。ここに、 $\dot{Q}^*$: $\dot{Q}$ の転置ベクトル、 $\dot{H}$: H を時間に関して1回微分したもの、である。

式(2)を式(3)に用い、整理すれば次式が得られる。

$$\dot{Q}_T^*(e')L(e',e')\ddot{Q}_T(e') + \dot{\Phi}_3^*(m)S(m,m)\dot{\Phi}_3(m) = -2\dot{Q}_T^*(e')K(e',e')|\dot{Q}_T(e',e')|\dot{Q}_T(e') - \dot{Q}_{C_1}^*(m)\dot{\Phi}_3(m) \quad (4)$$

ここで、関数 V を次のように定義する。

$$V = \frac{1}{2}\dot{Q}_T^*(e')L(e',e')\dot{Q}_T(e') + \frac{1}{2}\dot{\Phi}_3^*(m)S(m,m)\dot{\Phi}_3(m) \quad (5)$$

上式の右辺は正値二次形式であるから、明らかに、 $V \geq 0$ である。このような関数 V を用いると、式(4)は

$$\dot{V} = -2 \dot{q}_T^* K |q_T| \dot{q}_T - \dot{q}_{c1}^* \dot{q}_{c1} \quad (6)$$

で表現される。上式の右辺第1項は常に負であること、さらに、一般に、末端調圧水槽からの取り出し流量の時間微分値はその水槽水位の時間微分値と同一符号をもつので、式(6)の右辺第2項もまた負であることを考慮すれば、 $\dot{V} < 0$ が成立することがわかる。

以上のことより、式(5)で定義された関数 V は制御理論における Lyapunov の安定定理を満足するものであり、これはいわゆる Lyapunov 関数に他ならない。したがって、本文で対象としているトリ型管路系は漸近的安定性を有しているといえる。

3. 数値計算例

まず、対象とした系は図-1に示すような三分岐管路系であり、末端調圧水槽からの取り出し流量はオリフィスによって制御されている。表-1の系の諸元を用い、 $H_1 = 20.0$ m の条件の下で、前報において行列表示された状態方程式を Runge-Kutta-Gill 法で数値的に解いて得られた結果より、関数 V の値を計算し、これを片対数紙上にプロットしたものが図-2である。なお、この場合、系に対する外乱として、水槽③のオリフィス開度がステップ状に初期開度の2倍にまで変化させられている。また、同図には、末端調圧水槽の断面積をいくつか変えて得られた結果もあわせて示されている。

図-2より、いずれの場合にも Lyapunov 関数は指数関数的に減少するが、末端水槽の断面積が大きくなるほど単位時間当りのその変動量は小さくなることが知られる。図-3は、 V のグラフの勾配の逆数はいわゆる時定数であることから、図-2の結果に基づいて計算した時定数と末端水槽③の断面積との関係を示したものである。これより、時定数は末端調圧水槽の断面積に比例することがわかる。なお、紙面の都合上、この場合の管路流量の時間的変動状況を図示することは省略するが、管路2の流量は単調に変動し収束しているのに対して、管路3の流量は減衰振動の収束性状を呈していることを付記しておく。

4. あとがき

以上、管路系の応答に関して若干の考察を行ったが、今後さらに複雑なケースについても検討を進めたい。

- 1) 常松芳昭: 管路系における非定常流れの解析法について(1), 土木学会中支部年講, 1977.
- 2) 鬼塚宏太郎: 状態空間解析による枝わかれ管路のサージング特性の評価, 土木学会論文報告集, No.262, 1977.

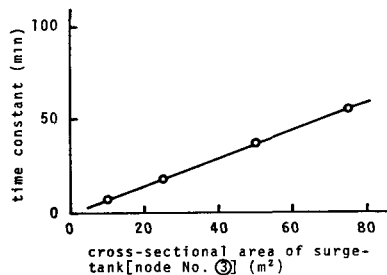


Fig.-3 Time Constant

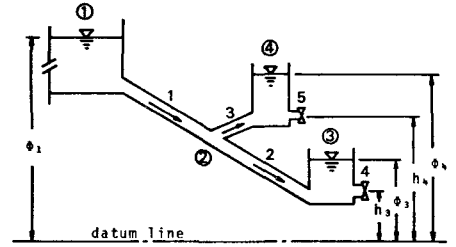


Fig.-1 Pipeline System

Tab.-1 Dimensions of the System

branch No.	1	2	3
pipe length(m)	500	200	300
pipe diameter(m)	0.5	0.3	0.3
node No.	③		④
cross-sectional area of surge-tank(m²)	50.0		30.0
elevation of orifice(m)	5.0		15.0
area of orifice opening at time zero(m²)	0.01		0.01

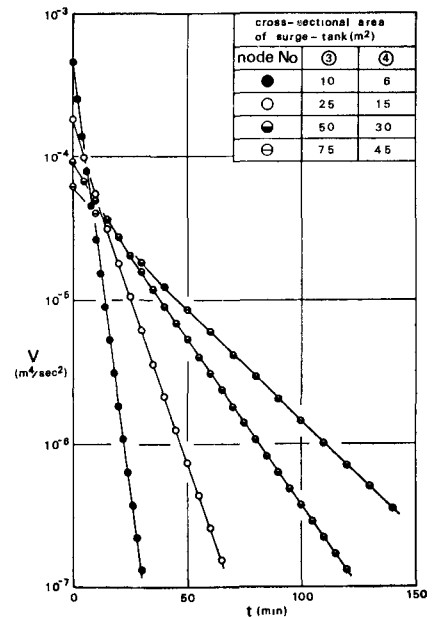


Fig.-2 Lyapunov Function