

まえがき 梁柱の弾性安定問題において、一定方向力（保存力）に対する解析は数多く行われ、解明されているが、撓動力（一般に非保存力）に対する解析は比較的少なく、研究の余地が残された分野の一つである。非保存的弾性安定問題の解析は、運動中の系の安定、不安定を判断することによらなければならないことは周知の通りである。本研究は集中撓動力および等分布撓動力を受ける薄肉閉断面材の有限要素解析法を示すととも、二つの適用例を示す。

仮想仕事方程式と等価節点力 外力 ($\delta_z^s, \delta_y^s, \delta_x^s$, m_x, m_y, m_z) および材端力 ($Q_{zi}^s, Q_{yi}^s, Q_{xi}^s, M_{zi}^s, M_{yi}^s, M_{xi}^s, M_{zi}^o, M_{yi}^o, M_{xi}^o, Q_{zi}^o, Q_{yi}^o, Q_{xi}^o, M_{zi}^o, M_{yi}^o, M_{xi}^o$) が作用し静時に安定な状態に外力が与えられた有限振幅振動状態を想定する。このとき、材端力に上記の初期材端力に ($Q_{zi}^s, Q_{yi}^s, Q_{xi}^s, M_{zi}^s, M_{yi}^s, M_{xi}^s, M_{zi}^o, Q_{yi}^o, Q_{xi}^o, M_{zi}^o, M_{yi}^o, M_{xi}^o$) なる材端力が付加される。また、要素の任意断面のせん断中心の変位 (u, v, w)、回転変位 (θ)、 $(-v_s, u_s, \theta)$ があるとき、外力は撓動荷重 Q として表えるので、次のように変化する。

$(\delta_z^s, 0, 0) \rightarrow (\delta_z^s, \delta_z^s \theta, -\delta_z^s u_s), (0, \delta_y^s, 0) \rightarrow (-\delta_y^s \theta, \delta_y^s, -\delta_y^s v_s), (0, 0, \delta_x^s) \rightarrow (\delta_x^s u_s, \delta_x^s v_s, \delta_x^s)$,
 $(m_x, 0, 0) \rightarrow (m_x, m_x \theta, -m_x u_s), (0, m_y, 0) \rightarrow (-m_y \theta, m_y, -m_y v_s), (0, 0, m_z) \rightarrow (m_z u_s, m_z v_s, m_z)$ ここで、 (u_s, v_s) は、同一断面の重心の変位である。

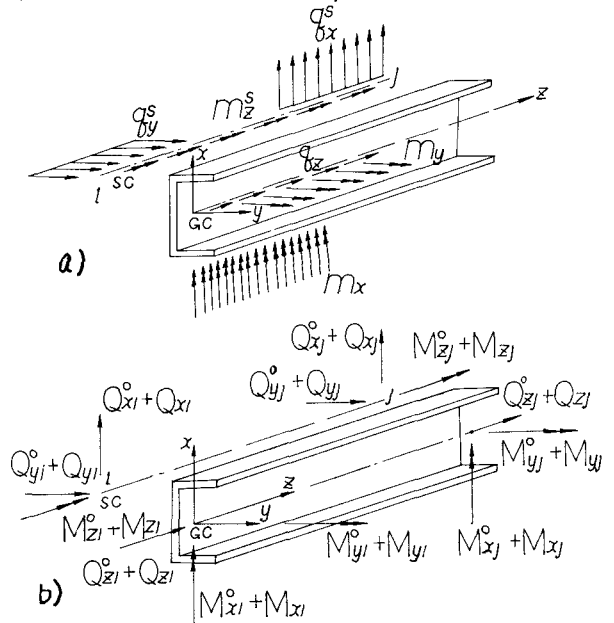


Fig-1 分布外力および外力時の材端力

今、有限振幅の振動状態にある要素について、ある時刻 t において、せん断中心に $\delta u_s, \delta v_s, \delta \theta$ 、重心に δw なる仮想変位を与えたとその仮想仕事方程式は次式で表わされる。

$$\int_0^l \{ m(\ddot{u}_s + g_s \theta) \delta u_s + m(\ddot{v}_s - g_s \theta) \delta v_s + m \ddot{w} \delta w + \mu I_{xx} \ddot{u}_s' \delta u_s' + \mu I_{yy} \ddot{v}_s' \delta v_s' + (\mu I_{ps} \dot{\theta}' + m g_s \dot{u}_s' - m x_s \dot{v}_s') \delta \theta + \mu I_{\omega}^s \dot{\theta}' \delta \theta' \} dz + \int_0^l \{ Q_z^s \{ (u_s' + g_s \theta') (\delta u_s' + g_s \delta \theta') + (v_s' - x_s \theta') (\delta v_s' - x_s \delta \theta') + v_s' \delta \theta \delta \theta' \} - M_z^s \{ \delta u_s' \theta' + u_s' \delta \theta' - 2 \beta_y \theta' \delta \theta' \} - M_y^s \{ \delta v_s' \theta' + v_s' \delta \theta' + 2 \beta_z \theta' \delta \theta' \} + 2 M_{\omega}^s \beta_{\omega} \theta' \delta \theta' + Q_x^s \{ \beta_x (\delta \theta \theta' + \theta \delta \theta') + \delta v_s' \theta + v_s' \delta \theta \} + Q_y^s \{ \beta_y (\delta \theta \theta' + \theta \delta \theta') - \delta u_s' \theta - u_s' \delta \theta \} - M_{\omega}^s \beta_{\omega} (\delta \theta \theta' + \theta \delta \theta') + M_z^s (u_s' \delta u_s' - u_s' \delta v_s') \} dz + \int_0^l \{ EA w' \delta w' + E I_{xx} u_s'' \delta u_s'' + E I_{yy} v_s'' \delta v_s'' + E I_{\omega}^s \theta'' \delta \theta'' + G K \theta' \delta \theta' \} dz - \int_0^l \{ -\delta_y^s \theta + \delta_z (u_s' + g_s \theta') \} \delta u_s + \{ m_x \theta + m_z v_s + x_s (\delta_x^s u_s' + \delta_y^s v_s') \} \delta u_s' + \{ \delta_x^s \theta + \delta_z (v_s' - x_s \theta') \} \delta v_s + \{ m_y \theta$$

$$\begin{aligned}
& -m_z^0 \dot{u}_s' + y_s (\delta_z^0 \dot{u}_s' + \delta_y^0 \dot{v}_s') \} \delta v_s' - (\delta_x^0 \dot{u}_s' + \delta_y^0 \dot{v}_s') \delta w + \{ y_s \delta_x^0 (\dot{u}_s' + y_s \theta') - x_s \delta_z^0 (\dot{v}_s' - x_s \theta') \\
& -m_x (\dot{u}_s' + y_s \theta') - m_y (\dot{v}_s' - x_s \theta') \} \delta \theta + \{ -\omega_n(x_s, y_s) (\delta_x^0 \dot{u}_s' + \delta_y^0 \dot{v}_s') + m_x \theta y_s - m_y \theta x_s \} \delta \theta' \} dz - (\alpha_{xi} \delta u_{si} \\
& + \alpha_{xj} \delta u_{sj} + \alpha_{yi} \delta v_{si} + \alpha_{yj} \delta v_{sj} - M_{xi} \delta v_{si}' - M_{xj} \delta v_{sj}' + M_{yi} \delta u_{si}' + M_{yj} \delta u_{sj}' + \alpha_{xi} \delta w_i + \alpha_{xj} \delta w_j + M_{zi} \delta \theta_i \\
& + M_{zj} \delta \theta_j + M_{\omega_i} \delta \theta_i' + M_{\omega_j} \delta \theta_j') = 0 \quad \text{--- (1)}
\end{aligned}$$

ここで (x_s, y_s) : セン断中心位置, μ, m : 単位体積および単位長さ質量, $E I_{xx}, E I_{yy}$: y および x -軸回りにある曲げ剛性, $E I_{\omega}$: 曲げねじり剛性, $G K$: ねじり剛性, I_{ps} : 極慣性モーメント, $\alpha_x^0, \alpha_y^0, \alpha_z^0, M_x^0, M_y^0, M_z^0, M_{\omega}^0$: 初期断面力, $\omega_n(x_s, y_s)$: セン断中心の ω , A : 断面積, $\gamma_s^0 = (I_{xx} + I_{yy})/A$, $\alpha_x = -x_s + \int_A x(x^2 + y^2) dA / (2 I_{xx})$, $\beta_y = -y_s + \int_A y(x^2 + y^2) dA / (2 I_{yy})$, $\beta_w = \int_A \omega_n(x^2 + y^2) dA / 2 I_{\omega}^0$ である。

今、梁柱の要素の変位関数として次の式を仮定する。ただし、 ω は円振動数である。

$$u_s = H(x) \bar{A} \bar{u}_s e^{i\omega t} \quad v_s = H(x) \bar{B} \bar{v}_s e^{i\omega t} \quad \theta = H(x) \bar{\Theta} \bar{\Theta} e^{i\omega t} \quad w = J(x) \bar{B} \bar{w} e^{i\omega t} \quad \text{--- (2)}$$

$$\begin{aligned}
& \text{ここで } H(x) = [1, x, x^2, x^3]^T, \quad J(x) = [1, x]^T \quad \bar{u}_s = [\bar{u}_{si}, \bar{u}_{si}', \bar{u}_{sj}, \bar{u}_{sj}']^T \\
& \bar{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -x/l^2 & -2x/l & x/l^2 & -1/l \\ 2x/l^3 & 1/l^2 & -2x/l^2 & 1/l^2 \end{bmatrix} \quad \bar{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1/l & 1/l \end{bmatrix} \quad \bar{v}_s = [\bar{v}_{si}, \bar{v}_{si}', \bar{v}_{sj}, \bar{v}_{sj}']^T \\
& \bar{w} = [\bar{w}_i, \bar{w}_j]^T \quad \bar{\Theta} = [\bar{\theta}_i, \bar{\theta}_i', \bar{\theta}_j, \bar{\theta}_j']^T \quad \text{--- (3)}
\end{aligned}$$

式(2)を式(1)に代入して、整理すると、

$$\{\bar{\Delta}\}^T [-\omega^2 [m] + [k] + [k_G] - [k_N] - \{f\}] e^{i\omega t} = 0 \quad \text{--- (4)}$$

ここで $\{\bar{\Delta}\}$: 材端変位ベクトル, $[m]$: 質量マトリックス, $[k]$: 剛性マトリックス, $[k_G]$: 初期歪力マトリックス, $[k_N]$: 分布振動荷重の非保存成分マトリックス, $\{f\}$: 材端力ベクトル, である。式中、 $[m]$, $[k]$, および $[k_G]$ は、既往の研究のそれと類似であるが、 $[k_N]$ は本研究で初めて提示するものがあり、次の要素をもつ。

$$\begin{aligned}
& \{\bar{\Delta}\} = \{\bar{u}_s^T, \bar{v}_s^T, \bar{w}^T, \bar{\Theta}^T\} \\
& [k_N] = \begin{bmatrix} \delta_z^0 k_N' + \delta_x^0 x_s k_N'' & (\delta_y^0 x_s + m_z^0) k_N'' & 0 & \{-\delta_y^0 k_N' + \delta_z^0 y_s k_N' + m_x (k_N')^T\} \\ (\delta_x^0 y_s - m_z^0) k_N'' & \delta_z^0 k_N' + \delta_y^0 y_s k_N'' & 0 & \{\delta_z^0 k_N' - \delta_x^0 x_s k_N' + m_y (k_N')^T\} \\ -\delta_x^0 x_s k_N' & -\delta_y^0 k_N' & 0 & 0 \\ \{(\delta_z^0 y_s - m_x^0) k_N' - \omega_n(x_s, y_s) \delta_z^0 k_N''\} \{(-\delta_x^0 x_s + m_y^0) k_N' - \omega_n(x_s, y_s) k_N''\} & 0 & \{(\delta_z^0 (x_s^2 + y_s^2) - m_x y_s + m_y x_s) k_N' + (m_x y_s - m_y x_s) (k_N')^T\} \end{bmatrix} \\
& \text{ここで、} k_N^0 = \bar{A}^T k_{00} \bar{A}, \quad k_N' = \bar{A}^T k_{01} \bar{A}, \quad k_N'' = \bar{A}^T k_{02} \bar{A}, \quad \bar{k}_{mn} = \bar{B}^T k_{0n} \bar{A}, \quad k_{mn} = \int_0^l (H^{(m)})^T H^{(n)} dz \quad \bar{k}_{mn} = \int_0^l (J^{(m)})^T J^{(n)} dz \\
& (m, n = 0, 1, 2) \quad \text{--- (5)}
\end{aligned}$$

式(4)より等価節点力は次式となる。

$$\{f\} = \{-\omega^2 [m] + [k] + [k_G] - [k_N]\} \{\bar{\Delta}\} \quad \text{--- (6)}$$

節点集中振動荷重時の平衡方程式 節点(要素間の共通点)に作用する荷重 $(P_{xi}, P_{yi}, P_{zi}, M_{xi}, M_{yi}, M_{zi})$ は振動にとらない、次のように変化する。ここで節点 i の全体座標軸方向の変位および回転角をそれぞれ (u_i, v_i, w_i) , $(\theta_{xi}, \theta_{yi}, \theta_{zi})$ とする。

$(P_{xi}, 0, 0) \rightarrow (P_{xi}, P_{xi}\theta_{zi}, -P_{xi}\theta_{xi}), (0, P_{yi}, 0) \rightarrow (-P_{yi}\theta_{zi}, P_{yi}, P_{yi}\theta_{xi}), (0, 0, P_{zi}) \rightarrow (P_{zi}\theta_{xi}, -P_{zi}\theta_{xi}, P_{zi})$,
 $(m_{xi}, 0, 0) \rightarrow (m_{xi}, m_{xi}\theta_{zi}, -m_{xi}\theta_{xi}), (0, m_{yi}, 0) \rightarrow (-m_{yi}\theta_{zi}, m_{yi}, m_{yi}\theta_{xi}), (0, 0, m_{zi}) \rightarrow (m_{zi}\theta_{xi}, -m_{zi}\theta_{xi}, m_{zi})$ したがって、有限振幅振動状態における節点の平衡方程式は次式で表わされる。

$$\sum_j [T_{ij}]^T \{f_{ij}\} - \{\bar{R}_i\} = 0 \quad \dots\dots (7) \quad \{\bar{R}_i\} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & P_{zi} & -P_{yi} \\ 0 & 0 & 0 & -P_{zi} & 0 & P_{xi} \\ 0 & 0 & 0 & P_{yi} & -P_{xi} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & m_{zi} & -m_{yi} \\ 0 & 0 & 0 & -m_{zi} & 0 & m_{xi} \\ 0 & 0 & 0 & m_{yi} & -m_{xi} & 0 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} U_i \\ V_i \\ W_i \\ \theta_{xi} \\ \theta_{yi} \\ \theta_{zi} \end{Bmatrix}$$

ここで $[T_{ij}]$: は部材の座標変換マトリックス

$\{f_{ij}\}$: は部材のi端の等価節点力

$\{\bar{R}_i\}$: 節点iの集中振動荷重非保存成分マトリックス

解析例)

(2軸対称断面柱)

荷重状態	境界条件	臨界値	本解法	差分法 ²⁾			変形法 ³⁾ ($\xi=10$)	ガウ-キン法 ⁴⁾ (5項近似)
				$\xi=10$	$\xi=50$	$\xi=100$		
集中振動力	固定-自由	Pl^2/EI	20.07 ^{**}	19.87	20.04	20.05	19.93	20.05 (最密解)
等分布 振動力	固定-自由	$8l^3/EI$	40.13 ^{**}	39.53	40.03	40.05	40.17	40.082
	固定-ヒンジ		57.13 [*]	54.96	56.92	56.99	58.83	57.068
	ヒンジ-ヒンジ		18.96 [*]	18.78	18.95	18.85	19.14	18.956
	固定-固定		80.63 [*]	76.34	80.09	80.22	83.71	80.402
集中振動トルク	固定-自由	$\pi l^2/EI$	0.710				0.709	
等分布振動トルク	固定-自由	$\pi l^2/EI$	1.157					

(** ... フラッター型 * ... ダイバージェンス型 ξ : 分割数)

(1) 軸対称断面柱) ----- 一端固定他端自由の薄形断面柱⁵⁾

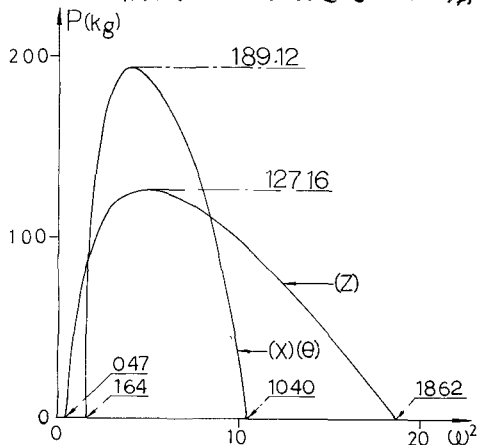


Fig-2 集中振動力を受ける柱の固有値曲線

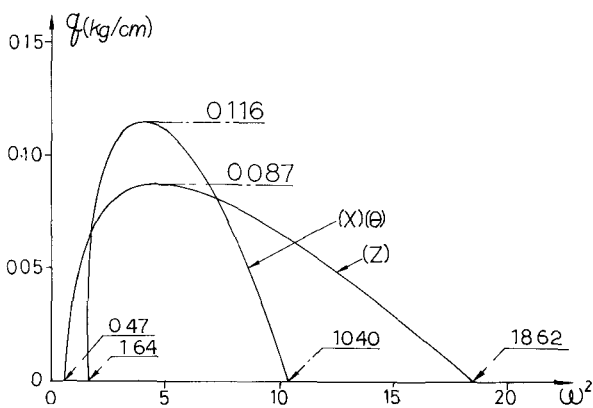


Fig-3 等分布振動力を受ける柱の固有値曲線

参考文献

- 1) Bassem, R.S : International Journal of NME, Vol. 6, pp 39~54, 1973
- 2) 杉山・片山・周谷 : 日本材料学会論文集, Vol. 37, No. 295, pp 455~461, 1971
- 3) 会田・渡木 : 土木学会論文報告集, No. 263, pp 25~34, 1977
- 4) 森本 : 山口大学修士論文, 昭和52年2月20日
- 5) 会田・佐賀・石井 : 土木学会中国四国支部昭和53年度学術講演会概要集, I-5