

川井モデルによる平板曲げの解析

呉工業高等専門学校 正員 ○ 藤田 幸史

“ “ 小堀 慈久

§1 ま え が き

有限要素法における平板曲解析は従来からよく行われている、そして、ここでは三角形分割要素を弾性体とみなして要素剛性マトリックスを求めたが、川井によって導かれた川井モデルにおいては、三角形要素を剛体とみなし、板の変形は要素間の辺にバネを施したものととして要素剛性マトリックスを求めるものである。この解析法により、あらかじめ予想される構造物のひびわれ破壊等の解析に適用される。本報告ではこのモデルにより平板曲げの変位等を得た事とこの解法の問題点について述べるものである。

§2 要素剛性マトリックス

平板曲げの要素剛性マトリックスを求めるのに基本となるのは図-1の2つの三角形要素の組である、荷重をかけたとき平面Aの方程式は

$$l_A x + m_A y + n_A z = P_A \quad (1)$$

とする。ここで l_A, m_A, n_A は平面Aの方向余弦である。 P_A は原点から平面Aへの垂線の長さである。各点の座標を ①; (x_0, y_0) , ①; (x_1, y_1) , ②; (x_2, y_2) , 変位を w_0, w_1, w_2 とすると

$$\left. \begin{aligned} l_A x_0 + m_A y_0 + n_A w_0 &= P_A & l_A x_1 + m_A y_1 + n_A w_1 &= P_A \\ l_A x_2 + m_A y_2 + n_A w_2 &= P_A \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

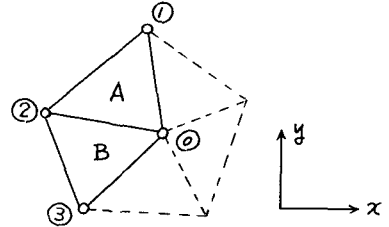


図 - 1

$$(2) \text{式より } l_A = \pm \frac{\Delta_{12}}{\sqrt{\Delta_{11}^2 + \Delta_{12}^2 + \Delta_{10}^2}}, m_A = \pm \frac{\Delta_{13}}{\sqrt{\Delta_{11}^2 + \Delta_{12}^2 + \Delta_{10}^2}}, n_A = \pm \frac{\Delta_{10}}{\sqrt{\Delta_{11}^2 + \Delta_{12}^2 + \Delta_{10}^2}}, P_A = \pm \frac{x_0 \Delta_{11} + y_0 \Delta_{12} + w_0 \Delta_{10}}{\sqrt{\Delta_{11}^2 + \Delta_{12}^2 + \Delta_{10}^2}} \quad (3)$$

同様にBの方向余弦 l_B, m_B, n_B が求まる。次に平面Aと平面Bの回転角を θ_{AB} とすると $\cos \theta_{AB} = l_A l_B + m_A m_B + n_A n_B \quad (4)$

$$\theta_{AB} \text{ が十分に小さいとすると } \cos \theta_{AB} = 1 - \frac{\theta_{AB}^2}{2} \quad (5)$$

$$(3) \text{式 } l_B, m_B, n_B \text{ 及び (4), (5) 式より } \frac{\theta_{AB}^2}{2} = -\frac{1}{\Delta_{10} \Delta_{20}} (\Delta_{11} \Delta_{21} + \Delta_{12} \Delta_{22}) + \frac{1}{2 \Delta_{10}} (\Delta_{11}^2 + \Delta_{12}^2) + \frac{1}{2 \Delta_{20}} (\Delta_{21}^2 + \Delta_{22}^2) \quad (6)$$

$$\text{連続バネの歪エネルギーは } V(W) = \frac{1}{2} k_{AB} \theta_{AB}^2 = \left[-\frac{1}{\Delta_{10} \Delta_{20}} (\Delta_{11} \Delta_{21} + \Delta_{12} \Delta_{22}) + \frac{1}{2 \Delta_{10}} (\Delta_{11}^2 + \Delta_{12}^2) + \frac{1}{2 \Delta_{20}} (\Delta_{21}^2 + \Delta_{22}^2) \right] k_{AB} \quad (7)$$

$$\text{ただし } W^T = [w_0, w_1, w_2, w_3] \text{ でカステリヤノの定理によって (7) 式より } R = \frac{\partial V}{\partial W} = K W \quad (8)$$

となり この K は表-1に示される。

表-1 剛性マトリックス

	w_0	w_1	w_2	w_3
Z_0	$\frac{\Delta_{20}}{\Delta_{10}} (y_{12}^2 + x_{12}^2) + \frac{\Delta_{10}}{\Delta_{20}} (y_{23}^2 + x_{23}^2) - 2(y_{12} y_{23} + x_{12} x_{23})$	$\frac{\Delta_{20}}{\Delta_{10}} (y_{12} y_{20} + x_{12} x_{20}) - (y_{23} y_{20} + x_{23} x_{20})$	$\frac{\Delta_{20}}{\Delta_{10}} (y_{12} y_{01} + x_{12} x_{01}) + \frac{\Delta_{10}}{\Delta_{20}} (y_{23} y_{30} + x_{23} x_{30}) - (y_{12} y_{30} + x_{12} x_{30})$	$\frac{\Delta_{10}}{\Delta_{20}} (y_{23} y_{02} + x_{23} x_{02}) - (y_{12} y_{02} + x_{12} x_{02})$
Z_1		$\frac{\Delta_{20}}{\Delta_{10}} (y_{20}^2 + x_{20}^2)$	$\frac{\Delta_{20}}{\Delta_{10}} (y_{20} y_{01} + x_{20} x_{01}) - (y_{20} y_{30} + x_{20} x_{30})$	$y_{20}^2 + x_{20}^2$
Z_2			$\frac{\Delta_{20}}{\Delta_{10}} (y_{01}^2 + x_{01}^2) + \frac{\Delta_{10}}{\Delta_{20}} (y_{30}^2 + x_{30}^2) - 2(y_{01} y_{30} + x_{01} x_{30})$	$\frac{\Delta_{10}}{\Delta_{20}} (y_{30} y_{02} + x_{30} x_{02}) - (y_{01} y_{02} + x_{01} x_{02})$
Z_3				$\frac{\Delta_{10}}{\Delta_{20}} (y_{20}^2 + x_{20}^2)$

S. Y. M

次にバネ定数 k_{AB} を定めると、図-2において辺 ①, ② に垂直な方向の曲率は垂直な方向に座標 S をとって次のように表わす。

$$\gamma = \frac{\partial^2 W}{\partial S^2} = \frac{2 \theta_{AB}}{h_1 + h_2} \quad (9)$$

平面曲げの変位と歪の関係、応力と歪の関係により応力 ($\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$) を求める。図-3で単位長さ当りの曲げモーメント、ねじりモーメントの成分をそれぞれ M_x, M_y, M_{xy} とし、又板厚を h とし、モーメントを図示の方向を正とすると

$$\begin{aligned} M_x &= \int_{-\frac{1}{2}h}^{\frac{1}{2}h} Z \sigma_x dz = -D \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \right) \\ M_y &= \int_{-\frac{1}{2}h}^{\frac{1}{2}h} Z \sigma_y dz = -D \left(\frac{\partial^2 W}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \right) \\ M_{xy} &= \int_{-\frac{1}{2}h}^{\frac{1}{2}h} Z \tau_{xy} dz = D(1-\nu) \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} \end{aligned} \quad (10)$$

ここで、平板の曲げ剛性 D は次のように表わされる。

$$D = \frac{E h^3}{12(1-\nu^2)} \quad (11)$$

図-2のAB(①)に対して(10)式の第1式で x を S 方向にとり $\frac{\partial^2 W}{\partial y^2}$ を無視し大きさを考えたと

$$M = M_S l = D l \frac{\partial^2 W}{\partial S^2} \quad (12)$$

となり(9)式と(12)式より

$$M = D l \frac{2 \theta_{AB}}{h_1 + h_2} \quad (13)$$

となる。図-2の要素のバネ定数を k_{AB} とすると、

$$M = k_{AB} \theta_{AB}$$

となり、(13)(14)式より k_{AB} は次のようになる。

$$k_{AB} = \frac{2 D l}{h_1 + h_2} \quad (15)$$

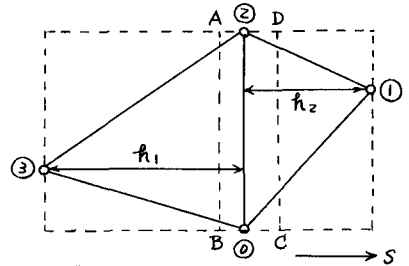


図-2

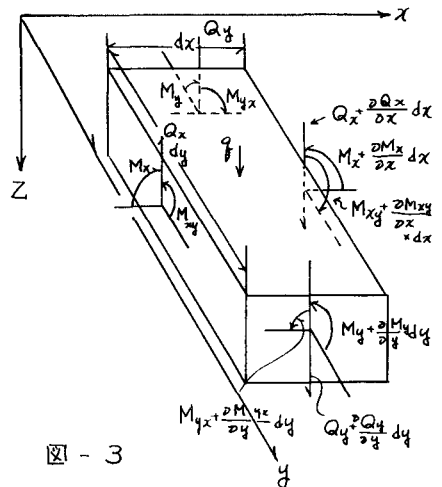


図-3

$$M_y + \frac{\partial M_y}{\partial y} dy$$

$$Q_y + \frac{\partial Q_y}{\partial y} dy$$

§3 平板曲げの計算例

一端固定の片持ちばりの場合とし、板厚は単位長さとする。図-4のような場合 図-5のように境界線 Y 軸に対し、対称な点 2, 4, 6 をつけ加え、その点の変位を θ とし新しい要素を作ればよい。この一端固定の片持ちばりの問題に対してはりの曲げ問題として解いて、 $\frac{d^2 z}{dx^2} = \frac{M}{EI}$ を用い $\delta = \frac{216 P}{EI}$ によって得る理論変位量と川井モデルによる F.E.M 解とは一致したものが出た。尚、計算結果の詳細は発表当日述べる。

§4 結 言

理論解と川井モデルによる F.E.M 解とにおいてほぼ一致したものが出た。ポアソン比の考慮がなかったために、分割方法や要素数において相違が出たのは今後の課題としたい。応力についてさらに検討したい。最後に御指導を賜った、日大戸川教授に対し謝意を表します。

<参考文献>

- 1) KAWAI, KONDO; New Beam and Plate Bending Elements in Finite Element Analysis, Inst. of Industrial Science, Vol. 28-9, 1976
- 2) KAWAI, TOI; A New Element in Discrete Analysis of Plane Strain Problems, Inst. of Industrial Science, Vol. 29-4, 1977
- 3) 棚原; 平板曲げ理論; コスモ-91による構造工学講座 II-5-A 日本鋼構造協会編, 培風館
- 4) 戸川; Fortran による有限要素法入門, サイエンス社

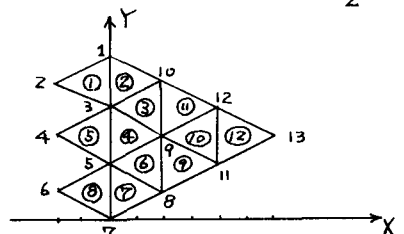


図-5