

# 統計的不均一性を有する弾性基礎上の板の信頼性解析

鳥取 県庁 正 員 ○ 福良 貞美  
鳥取大学工学部 正 員 白木 渡  
鳥取大学工学部 正 員 高岡 宣善

1. まえがき 統計的不均一性を有する弾性基礎上の無限鋼板の信頼性解析を多変数不規則関数論を用いて行った。弾性基礎の持つ不均一性の主たる要因を反力係数の不均一性にあると考え、その不均一性が基礎上の無限鋼板のためにおよび曲げモーメントへ及ぼす影響を、これらの統計的特性値および破壊確率を求めることにより明らかにした。ここで反力係数を正規定常不規則関数とし、反力係数が2点間の距離のみに依存し方向に無関係とみなせるような相関関数を有する一樣等方不規則関数の場合と、方向性を有する2変数不規則関数の場合を考へ、それぞれの場合について、鋼板のためにおよび曲げモーメントの標準偏差の比較を行った。また反力係数の変動係数の鋼板の破壊確率に及ぼす影響および固有波数の変化と破壊確率の関係についても考察した。

2. スペクトル法による統計的特性値の解析 板の基礎微分方程式は、中立面のためを  $w(x, y)$  として次式となる：

$$D \nabla^4 w(x, y) + C(x, y) \cdot w(x, y) = q(x, y) \quad (1)$$

上式中、 $D$ ：曲げ剛性、 $\nabla^4 = \frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^2}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4}{\partial y^4}$ 、 $C(x, y)$ ：反力係数、 $q(x, y)$ ：分布荷重。 $C(x, y)$  および  $q(x, y)$  とともに定常でエルゴード性を有する不規則関数であると仮定する。式(1)の解を求めるために微小パラメータの方法を適用する<sup>1)</sup>。 $C_0$ 、 $q_0$  をそれぞれの平均値とし、 $q(x, y) = q_0 + \varepsilon q_1(x, y)$ 、 $C(x, y) = C_0 + \varepsilon C_1(x, y)$ 、 $w(x, y) = \varepsilon w_1(x, y) + \varepsilon^2 w_2(x, y) + \dots$ 、について微小パラメータ  $\varepsilon$  の同べき次数についてまとめると次式となる：

$$D \nabla^4 w_0(x, y) + C_0 w_0(x, y) = q_0, \quad (2-1) \quad D \nabla^4 w_1(x, y) + C_0 w_1(x, y) = q_1(x, y) - w_0(x, y) C_1(x, y), \quad (2-2)$$

$$D \nabla^4 w_2(x, y) + C_0 w_2(x, y) = -C_1(x, y) w_1(x, y), \quad (2-3) \quad \dots \dots \dots$$

式(2-1)の解で無限遠で有界なもの  $w_0(x, y) = \frac{q_0}{C_0}$  を考慮し、 $\varepsilon^2$  以上の高次の項を無視すれば、問題は次式

$$D \nabla^4 w_1(x, y) + C_0 w_1(x, y) = r(x, y), \quad (3) \quad r(x, y) \equiv \frac{1}{C_0} \{ C_0 q_1(x, y) - q_0 C_1(x, y) \} \quad (4)$$

を解くことに還元される。式(3)で示される系の伝達関数  $F(i\omega_1, i\omega_2)$  は次式で与えられる：

$$F(i\omega_1, i\omega_2) = \frac{1}{D \{ (\omega_1^2 + \omega_2^2)^2 + \omega_0^4 \}}, \quad \omega_0 = \left( \frac{C_0}{D} \right)^{1/4} : \text{固有波数} \quad (5)$$

そうすると、不規則関数  $r(x, y)$  のスペクトル密度  $S_r(\omega_1, \omega_2)$  が与えられれば、ためにおよび曲げモーメントのスペクトル密度  $S_{w_1}(\omega_1, \omega_2)$ 、 $S_{M_x}(\omega_1, \omega_2)$  は、次式で求められる：

$$S_{w_1}(\omega_1, \omega_2) = \frac{1}{D^2 \{ (\omega_1^2 + \omega_2^2)^2 + \omega_0^4 \}^2} \cdot S_r(\omega_1, \omega_2), \quad S_{M_x}(\omega_1, \omega_2) = \frac{\omega_1^4 + \omega_2^4}{\{ (\omega_1^2 + \omega_2^2)^2 + \omega_0^4 \}^2} \cdot S_r(\omega_1, \omega_2) \quad (6)$$

不規則関数  $r(x, y)$  の最も重要な要因は反力係数であり、分布荷重  $q_1(x, y)$  による不規則性の影響を無視すれば、 $r(x, y)$  のスペクトル密度は  $S_r(\omega_1, \omega_2) = \left( \frac{q_0}{C_0} \right)^2 \cdot S_{C_1}(\omega_1, \omega_2)$  となる。ここに  $S_{C_1}(\omega_1, \omega_2)$  は反力係数のスペクトル密度である。 $r(x, y)$  が、すなわち  $C_1(x, y)$  が一樣等方不規則関数のときには、式(6)において  $\omega_1 = \omega \cos \theta$ 、 $\omega_2 = \omega \sin \theta$  の変数変換を行い、次のようになる：

$$S_{w_1}(\omega) = \frac{\omega}{D^2 (\omega^4 + \omega_0^4)^2} \cdot S_r(\omega), \quad S_{M_x}(\omega, \theta) = \frac{\omega^5}{(\omega^4 + \omega_0^4)^2} (\cos^4 \theta + \sin^4 \theta) \cdot S_r(\omega) \quad (7)$$

上式中、 $S_r(\omega)$  は、 $r(x, y)$  の相関関数  $K_r(\xi)$  より次式で計算される：

$$S_r(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} K_r(\xi) \cdot J_0(\omega \xi) \xi d\xi, \quad J_0(\omega \xi) : 0 \text{ 次ベッセル関数} \quad (8)$$

反力係数  $C_1(x)$  の相関関数は次式で与えられるものとする： $K_{C_1}(\xi) = G_c^2 \exp(-\alpha |\xi|) \cos \beta \xi$ 。 (9)

ここに、 $G_c$  は反力係数の標準偏差であり、 $\alpha$ 、 $\beta$  は実験的に定められるパラメータである。二変数不規則関数の場合には、次式を用いる<sup>2)</sup>： $K_{C_1}(\xi_1, \xi_2) = G_c^2 \exp \left( -\frac{\xi_1^2}{\delta_x^2} - \frac{\xi_2^2}{\delta_y^2} \right)$ 、 $\delta_x$ 、 $\delta_y$ ： $x, y$  方向の相関距離。 (10)

一様等方性が考えられるときには、 $\delta_x = \delta_y = \delta$  として、 $\xi^2 = \xi_1^2 + \xi_2^2$  を考慮し、 $K_{\xi_1}(\xi) = \sigma_c^2 \exp(-\frac{\xi^2}{\delta^2})$  と式(9)とから計算される相関距離を相等しくすることにより、実験データ値  $\alpha$ ,  $\beta$  から  $\delta$  を決定する。式(9), (10)の相関関数がら逆フーリエ変換により、不規則関数  $r(x)$  および  $r(x, y)$  のスペクトル密度が決定される：

$$S_r(\omega) = \left(\frac{\sigma_c}{\sigma_0}\right)^2 \cdot \frac{\sigma_c^2}{4\pi} \cdot \frac{1}{(\gamma^2 + 4\alpha^2\beta^2)^{3/2}} \cdot \sqrt{2\{(\alpha^2 - \beta^2)(\gamma^3 - 12\gamma\alpha^2\beta^2) - 16\alpha^4\beta^4 + 12\gamma^2\alpha^2\beta^2 + (\alpha^2 + \beta^2)(\gamma^2 + 4\alpha^2\beta^2)^{3/2}\}}, \quad (11)$$

上式中、 $\gamma = \alpha^2 + \omega^2 - \beta^2$  である。

$$S_r(\omega_1, \omega_2) = \left(\frac{\sigma_c}{\sigma_0}\right)^2 \cdot \frac{\sigma_c^2}{4\pi} \cdot \delta_x \cdot \delta_y \cdot \exp\left(-\frac{\delta_x^2}{4} \cdot \omega_1^2\right) \cdot \exp\left(-\frac{\delta_y^2}{4} \cdot \omega_2^2\right). \quad (12)$$

3. 破壊確率の算定式 一般に  $n$  変数正規定常不規則関数  $\zeta(x, y)$  による平面  $\times 0$  上の単位面積当りのレベル  $\alpha$  の超過確率は、次式で示される：

$$P_{\alpha}^+(a|x, y) = -\int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty f(\zeta, \zeta_x, \zeta_y, \zeta_{xx}) \zeta_y \zeta_{xx} d\zeta_y d\zeta_{xx}. \quad (13)$$

ここに  $\zeta_x = \frac{\partial \zeta}{\partial x}$ ,  $\zeta_y = \frac{\partial \zeta}{\partial y}$ ,  $\zeta_{xx} = \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2}$   $z$  あり、 $f(\zeta, \zeta_x, \zeta_y, \zeta_{xx})$  はこれらの同時確率密度で  $f(a, 0, \zeta_y, \zeta_{xx})$  である。 $\zeta_x, \zeta_y, \zeta_{xx}$  も正規であるから、 $x_1 = \zeta, x_2 = \zeta_x, x_3 = \zeta_y, x_4 = \zeta_{xx}$  とおくと同時確率密度は次式となる： $f(\zeta, \zeta_x, \zeta_y, \zeta_{xx}) = \frac{1}{4\pi^2 \sqrt{\Delta}} \exp\left\{-\frac{1}{2\Delta} \sum_{j,k=1}^4 A_{jk} x_j x_k\right\}$ 。上式中、 $\Delta$  は相関行列の要素  $k_{jk}$  で作られる行列式であり、 $A_{jk}$  は  $k_{jk}$  に対応する余因数である。式(13)に代入して積分を行うと、次式となる：

$$P_{\alpha}^+(a|x, y) = \frac{\alpha}{2\pi \sqrt{2\pi}} \cdot \frac{1}{R_{11}} \cdot \sqrt{\frac{R_{22}R_{33} - R_{23}^2}{R_{11}}} \cdot \exp\left(-\frac{\alpha^2}{2R_{11}}\right). \quad (14)$$

式(14)は超過確率密度を表わし、同時に単位面積当りの平均超過回数に等しい。レベル  $\alpha$  は十分高く取られることから超過の回数は、Poisson 分布で近似できる。したがって面積  $S$  内で 1 回も超過が生じない確率は  $\exp\{-P_{\alpha}^+(a|x, y) \cdot S\}$  となり、破壊確率は次式となる：

$$Q_{\alpha} = 1 - \exp\{-2 \cdot P_{\alpha}^+(a|x, y) \cdot S\}. \quad (15)$$

#### 4. 数値計算例および考察

|          | $C_0$ [t/m <sup>2</sup> ] | $\sigma_c$ [t/m <sup>2</sup> ] | $\alpha$ [m <sup>2</sup> ] | $\beta$ [m <sup>2</sup> ] | $\delta$ [m] | $\sigma_0$ [t/m <sup>2</sup> ] |
|----------|---------------------------|--------------------------------|----------------------------|---------------------------|--------------|--------------------------------|
| DATA(I)  | 626.5                     | 206.3                          | 2.75                       | 3.65                      | 0.2818       | 6.265                          |
| DATA(II) | 1000.0                    | 300.0                          | 0.05                       | 0.10                      | 14.9053      | 10.0                           |

図-1はT=4mの場合、図-2

は曲げモーメントの場合について、 $\omega_0$  を横軸に、標準偏差  $\sigma_{w1}$ ,  $\sigma_{w2}$  を表わしたものである。2つのデータを用いた解法の違いによる定性的な傾向は同じである。図-3は、横軸に反力係数の変動係数  $V_c$  を取り、データから計算される  $\sigma_{w1}$  を LEVEL=1 として 1~5 倍までをパラメータとして表わしたものである。レベルが高いほど、DATA(I)を用いるほど、 $V_c$  の変化が  $Q_{w1}$  に大きく現われている。図-4は  $\omega_0$  と  $Q_{w1}$  の関係を示したもので、 $\delta = \frac{\alpha}{\sqrt{R_{11}}}$  を横軸に取っている。 $\omega_0$  の変化に伴う  $Q_{w1}$  の増加率の違いがわかる。

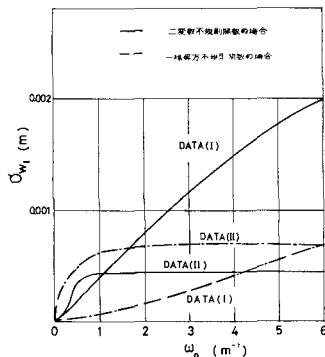


図-1

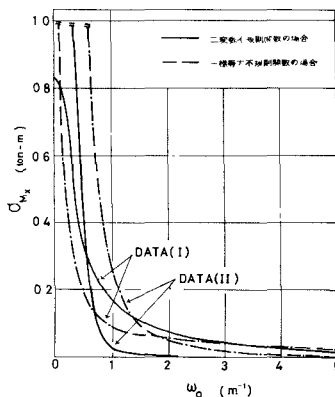


図-2

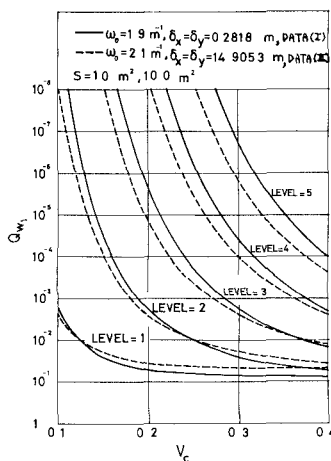


図-3

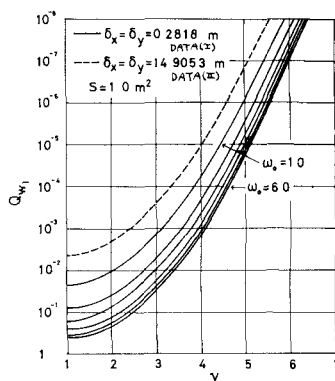


図-4

- 1) Д.Н.Соболев, Б.П.Жаянс, В.И.Шейнин: К расчету плит на статистически неоднородном основании. «СМРС», No.3, 1968.
- 2) J. Morla Catalán, C.A. Cornell: Earth Slope Reliability by a Level-Crossing Method. Jour. of the G.E.Div., ASCE, Vol. 102, 1976-6.
- 3) А.А.Свещников: Прикладные методы теории случайных функций, Издательство «Наука», Москва (1968).