

従動圧縮力を受ける薄肉開断面柱の非保存的弾性安定性について

山口大学 正員 會田 忠義
徳山高等 〃 〃 佐賀 孝徳
松尾設計 〃 〃 石井 祐

まなび 重力などの一定方向力（保存力）を受ける薄肉開断面柱の弾性安定問題は、これまでに多くの研究がなされ、そのほとんどが解決されようとしている。しかし、従動力（一般に非保存力）を受ける柱については二軸対称断面柱について二次元的に解析されているだけで、薄肉開断面柱の非保存的弾性安定問題についての研究は非常に少ない。本研究は、二重連成振動を起す溝形断面の一端固定他端自由柱に集中従動力あるいは等分布従動力が作用する場合の安定性状を一般的 *Galerkin* 法を用いて解析調査したものである。

仮想仕事方程式 分布外力 $(\bar{g}_x, m_x, m_y)$ が作用し、初期応力として $(Q_x^0, Q_y^0, Q_z^0, M_x^0, M_y^0, M_z^0, M_x^{\omega\omega}, M_y^{\omega\omega}, M_z^{\omega\omega})$ が生じて平衡状態にある材長 l の柱に外乱を与え、有限振幅の振動状態を規定する。この状態における仮想仕事方程式を求めると次式となる¹⁾。

$$\int_0^l \left[\{m(\ddot{u}_s + y_s \ddot{\theta}) + EI_{xx} u_s^{(m)} - \{Q_x^0(u_s' + y_s \theta')\}' + (M_x^0 \theta)'' + (M_x^{\omega\omega} u_s')'' - \bar{g}_x(u_s' + y_s \theta') + (m_x \theta')'\} \delta u_s + \{m(\ddot{v}_s - x_s \ddot{\theta}) + EI_{yy} v_s^{(m)} - \{Q_y^0(v_s' - x_s \theta')\}' + (M_y^0 \theta)'' - (M_y^{\omega\omega} v_s')'' - \bar{g}_y(v_s' - x_s \theta') + (m_y \theta')'\} \delta v_s + \{(\mu I_{ps} \ddot{\theta} + m_y \dot{u}_s - m_x \dot{v}_s) + EI_{\omega\omega} \theta^{(m)} - GK \theta'\} \delta \theta + \{Q_x^0(u_s' y_s - v_s' x_s) + Q_y^0 v_s' \theta' + 2(M_x^0 \beta_y - M_y^0 \beta_x + M_z^0 \beta_{\omega}) \theta'\}' + M_x^0 u_s'' + M_y^0 v_s'' - (Q_x^0 \beta_x + Q_y^0 \beta_y - M_x^{\omega\omega} \beta_{\omega}) \theta - \bar{g}_x \{y_s(u_s' + y_s \theta') - x_s(v_s' - x_s \theta')\} + m_x(u_s' + y_s \theta') + m_y(v_s' - x_s \theta') + (m_x \theta y_s - m_y \theta x_s)\} \delta \theta \right] dz + \left\{ -EI_{xx} u_s^{(m)} + Q_x^0(u_s' + y_s \theta') - (M_x^0 \theta)' - (M_x^{\omega\omega} v_s') - (m_x \theta) - Q_x \{ \delta u_s \}_0^l + (EI_{xx} u_s'' + M_x^0 u_s' - M_y^0) \delta u_s \Big|_0^l + \{ -EI_{yy} v_s^{(m)} + Q_y^0(v_s' - x_s \theta') - (M_y^0 \theta)' - (M_y^{\omega\omega} u_s') - (m_y \theta) - Q_y \{ \delta v_s \}_0^l + (EI_{yy} v_s'' - M_x^0 u_s' + M_y^0) \delta v_s \Big|_0^l + \{ -EI_{\omega\omega} \theta^{(m)} + GK \theta' + Q_x^0(y_s u_s' - x_s v_s' + v_s' \theta) - M_x^0 u_s' - M_y^0 v_s' + 2(M_x^0 \beta_y - M_y^0 \beta_x + M_z^0 \beta_{\omega}) \theta' + (Q_x^0 \beta_x + Q_y^0 \beta_y - M_x^{\omega\omega} \beta_{\omega}) \theta - M_x - (m_x y_s - m_y x_s) \theta \} \delta \theta \Big|_0^l + (EI_{\omega\omega} \theta'' - M_z^0) \delta \theta \Big|_0^l = 0 \right. \quad (1), \quad \text{ここで、} u_s, v_s: \text{断面のせん断中心の} x \text{および} y \text{軸方向の水平変位、} \theta: \text{回転変位、} (x_s, y_s): \text{せん断中心の座標、} \mu, m: \text{単位体積および柱の単位長さ当たりの質量、} EI_{xx}, EI_{yy}: x \text{および} y \text{軸に関する曲げ剛性、} EI_{\omega\omega}: \text{曲げねじり剛性、} GK: \text{ねじり剛性、} I_{ps}: \text{極慣性モーメント、} (Q_x, Q_y, Q_z, M_x, M_y, M_z, M_x^{\omega\omega}, M_y^{\omega\omega}, M_z^{\omega\omega}): \text{振動による断面力、である。}$$

初期応力は、柱頭に集中従動力 P が作用する場合 $M_x^0 = -Py_0, M_y^0 = Px_0, M_x^{\omega\omega} = M_x^{\omega\omega} = M_y^{\omega\omega} = Q_x^0 = Q_y^0 = 0, Q_z^0 = -P$ 同様に、等分布従動力 $\bar{g}_x$ が作用する場合 $M_x^0 = -\bar{g}_x(l-z)y_0, M_y^0 = \bar{g}_x(l-z)x_0, M_x^{\omega\omega} = M_x^{\omega\omega} = M_y^{\omega\omega} = Q_x^0 = Q_y^0 = 0, Q_z^0 = -\bar{g}_x(l-z)$ ただし、後者の荷重状態に対しては、 $m_x = -\bar{g}_x y_0, m_y = \bar{g}_x x_0$ が付加される。 (x_0, y_0) : 荷重作用位置座標。

一般的 *Galerkin* 法による解析 非保存問題に *Galerkin* 法を適用する場合の収束性については、系の基準関数も基底関数とするとき明らかにされている²⁾。本研究では、柱のたわみ振動およびねじり振動の基準関数 $\{u_{sk}\}, \{v_{sk}\}$ および $\{\theta_k\}$ を基底関数とし、解をこれらの関数の一次結合の三項近似で表わした。

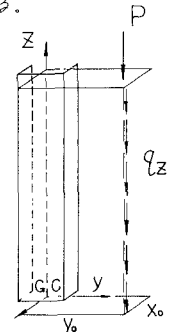


Fig. 1

$$U_s = e^{i\omega t} \sum_{K=1}^3 P_K U_{sK}, \quad V_s = e^{i\omega t} \sum_{K=1}^3 O_K V_{sK}, \quad \theta = e^{i\omega t} \sum_{K=1}^3 \tau_K \theta_K \quad (2), \quad \omega: \text{円振動数.}$$

式(2)を式(1)に代入し、係数 P, O および α の変分量の任意性より次の条件式(3)(4)および(5)が得られる。

$$\sum_{K=1}^3 \int_0^l [-m\omega^2 (P_K U_{sK} + y_s \tau_K \theta_K) + EI_{xx} U_{sK}^{(iv)} + P \{ P_K U_{sK}^{(iv)} - (y_0 - y_s) \tau_K \theta_K'' + \gamma_s \{ (l-x) P_K U_{sK}'' + y_0 \tau_K \theta_K'' \} + y_0 \tau_K \theta_K' - y_0 (l-x) \tau_K \theta_K' \}] U_{sK} dx = 0 \quad (3)$$

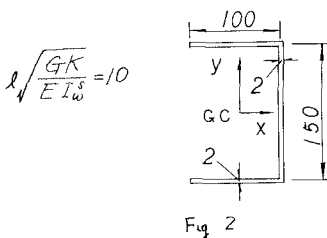
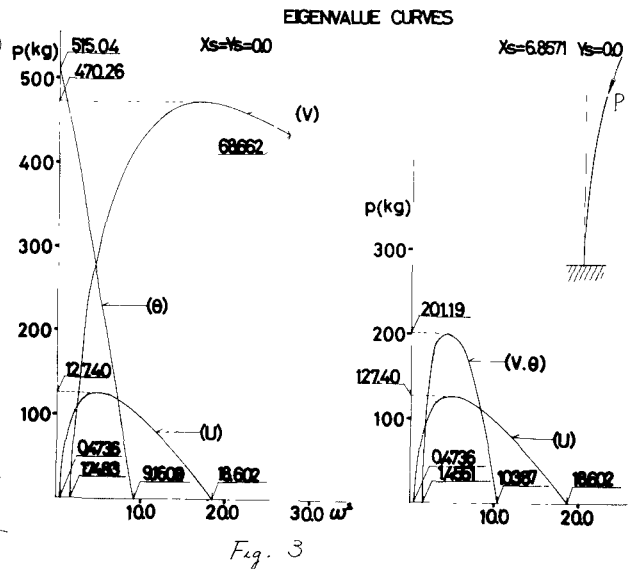
$$\sum_{K=1}^3 \int_0^l [-m\omega^2 (O_K V_{sK} - x_0 \tau_K \theta_K) + EI_{yy} O_K V_{sK}^{(iv)} + P \{ O_K V_{sK}^{(iv)} + (x_0 - x_0) \tau_K \theta_K'' + \gamma_s \{ (l-x) (O_K V_{sK}'' - x_0 \tau_K \theta_K') - x_0 \tau_K \theta_K' + x_0 (l-x) \tau_K \theta_K' \}] V_{sK} dx = 0 \quad (4)$$

$$\sum_{K=1}^3 \int_0^l \left[-\omega^2 (\mu I_{xx} \tau_K \theta_K + m y_s P_K U_{sK} - m x_0 O_K V_{sK} + EI_{xx}^s \tau_K \theta_K^{(iv)} - G K \tau_K \theta_K'' - P \{ (y_0 - y_s) P_K U_{sK}'' - (x_0 - x_0) O_K V_{sK}'' - (V_s^2 + 2 y_0 \beta_y + 2 x_0 \beta_x) \tau_K \theta_K' \} - \gamma_s \{ (y_0 - y_s) (l-x) P_K U_{sK}'' + y_0 P_K U_{sK}' - (x_0 - x_0) (l-x) O_K V_{sK}'' - x_0 O_K V_{sK}' + (V_s^2 + 2 y_0 \beta_y + 2 x_0 \beta_x) \tau_K \theta_K' + 2 (y_0 y_s + x_0 x_s) \tau_K \theta_K' - (V_s^2 + 2 y_0 \beta_y + 2 x_0 \beta_x) (l-x) \} \right. \\ \left. \times \tau_K \theta_K'' \right] \theta_K dx - P \{ V_s^2 + 2 y_0 \beta_y + 2 x_0 \beta_x - (y_0 - y_s)^2 - (x_0 - x_s)^2 \} \tau_K \theta_K' \Big|_0^l + \gamma_s (y_0 y_s + x_0 x_s) \tau_K \theta_K' \Big|_0^l \\ = 0 \quad (5) \quad i = 1, 2, 3$$

式(3), (4)および(5)を行列表示すると K より次の特性方程式(6)が得られる。

$$| -\omega^2 M + A + PB + \gamma_s C | = 0 \quad (6)$$

解析結果 Fig. 2 に示す薄砂材にフッて集中従動力の断面の重心に作用した場合と等分布従



動力の同じく断面の重心に作用した場合にフッて固有値曲線 (Fig. 3 と 4) と振動モードの変化を求めた。

- 1) 倉田 岩佐・土木学会中国四国支部昭和53年度学術講演会、講演概要、I-19
- 2) Leipholz, H. ZAMP, Vol. 14, pp. 70~79, 1963.

