ステップ荷重を受ける構造中の波動伝播解析

山口大学工学部　正員　○中川浩二
徳山工業高専　正員　工藤孝三

1 はじめに

衝突問題あるいは爆破による載荷の問題等，構造物がほぼステップ荷重とみなせるような急峻な立ち上りをもつ荷重を受ける現象はよくみられるところである。（例えばダイナマイトの爆発による衝撃の立ち上り時間は数μsecと報告されている）。このような波動伝播問題を数値解析するとき，運動方程式を逐次数値積分することになる。数値積分法としては古くから数多くの方法が提案されてきており，またそれらの比較もなされてきている。しかし系がステップ荷重を受ける場合については荷重の不連続性より計算結果に大きな誤差（オーバーシュート）を生じることが知られている。

本研究は有限要素法を用いたステップ荷重を受ける構造要素の数値解析法に関する若干の問題について検討を加えたものである。

2. 差分法による解析と問題点

1次元の波動方程式は

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

で与えられる。ここでcは波の伝播速度であり，一様な棒中の縦波の伝播を考えるときには $c=\sqrt{E/\rho}$ で与えられる。いまこれを中央差分化すると

$$\frac{u_j^{n+1}-2u_j^n+u_j^{n-1}}{\Delta t^2} = c^2\frac{u_{j+1}^n-2u_j^n+u_{j-1}^n}{\Delta x^2} \quad \cdots\cdots (1)$$

となる。この差分方程式の伝播速度は $1/\lambda = \Delta x/\Delta t$ で与えられる。ここで差分方程式の伝播速度を波動方程式のそれに一致させるため $c\Delta t/\Delta x = 1$ ととり，境界条件として $E\partial u/\partial x = \sigma$，すなわち $u_{j+1}^n - u_{j-1}^n = 2\sigma\Delta x/E$ を与え，これが棒端に一定時間作用するようにとると，うまくステップ荷重に対する棒の挙動を表現できるかのようである。しかし変位については時間ステップに対する変位の増加はモデル中の1点について図-1に示すように階段状となり適切ではない。ここで上記波動方程式を

$$\rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = E\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad \cdots (2)$$

とし，差分方程式を

$$\rho\Delta x \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = E\left(\frac{u_{j+1}^n-u_j^n}{\Delta x} - \frac{u_j^n-u_{j-1}^n}{\Delta x}\right) \quad \cdots (3)$$

と表わすと点（j, n）の力のつり合い式とみることができる（質量はρΔxと考えられる）。

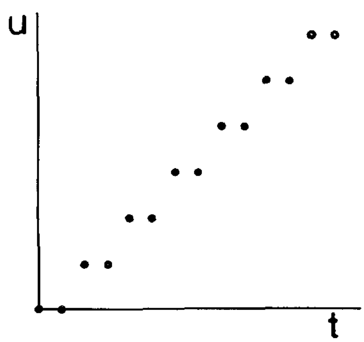

図-1　ステップ荷重を受ける1次元体中の変位の計算結果

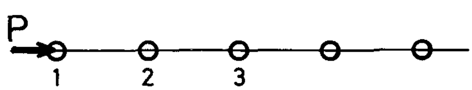

図-2. 1次元構造の差分モデル

いま図-2の1点における力のつり合いを考えると

$$\rho\Delta x\frac{\partial^2 u_1^n}{\partial t^2} = E\left(\frac{u_2-u_1}{\Delta x}\right)+P \quad \cdots (4)$$

となり，これを境界条件として差分方程式の数値解析を行うと変位についても合理的な解を得ることができる。しかし応力については（j, n）点ではなく，（j+1/2, n）の点について求めることが妥当となる。これはステップ荷重の波頭が一時間刻みにちょうど一空間刻みずつ進む（$c\Delta t/\Delta x=1$）としたため生じるものである。ここで $c\Delta t/\Delta x$ のいくつかの値について，長さ20Δxの棒中を20Δxの波長をもつステップ波が伝播

する場合の 9+1/2 点の応力を示す（図-3）。

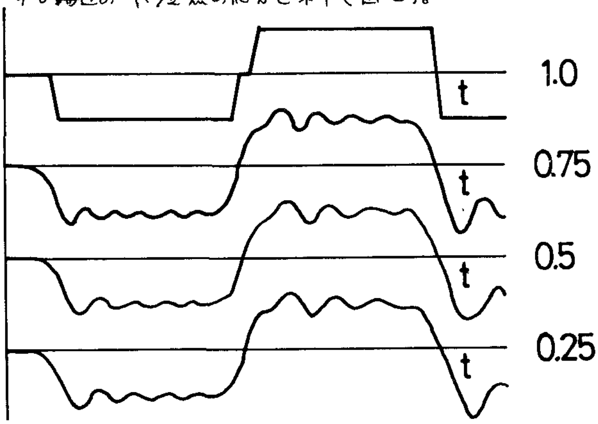

図-3　ステップ荷重を受ける棒中の応力

(3)式の右辺を j 点が時間 n において受ける力であるとみなし F_j^n と表わす。　そのときこの式は

$$\frac{u_j^{n+1}-u_j^n}{\Delta t}-\frac{u_j^n-u_j^{n-1}}{\Delta t}=\frac{F_j^n}{\rho\Delta x}\Delta t \quad \cdots (5)$$

となり (j, n) における加速度 ($F_j^n/\rho\Delta x$) の Δt 時間作用した結果の速度増分が j 点の $(n+1/2)\Delta t$ と $(n-1/2)\Delta t$ 時間における速度の差であることを表わしている。すなわち

$$\alpha_j^n\Delta t = v_j^{n+1/2}-v_j^{n-1/2} \quad \cdots (6)$$

であるので

$$u_j^{n+1}=u_j^n+v_j^{n+1/2}\Delta t=u_j^n+v_j^{n-1/2}\Delta t+\alpha_j^n\Delta t^2 \cdots (7)$$

となる。

3．有限要素法による解析と問題点

問題を1次元に限定する。　断面積A，密度ρの棒中をσの大きさのステップ応力が伝播するとする。そのとき，この応力状態にある質点の粒子速度は $v=\sigma/\rho c$ で与えられる。

いま有限要素化された節点 j にステップ応力の波頭が到達した場合の節点の受ける力は $F_j=A\sigma=A\rho cv$ となる。　したがってこの節点が受ける加速度は

$$\alpha_j^n=\frac{F_j}{M}=\frac{A\rho cv}{\rho\Delta lA}=\frac{c}{\Delta l}v=\frac{v}{\Delta t} \quad \cdots (8)$$

である。

次に離散化しない状態を考え，波頭は位置 l へ時刻 t に到達するとし，この点の加速度，速度，変位を図示すると図-4となる。　すなわち時刻 a で Dirac の

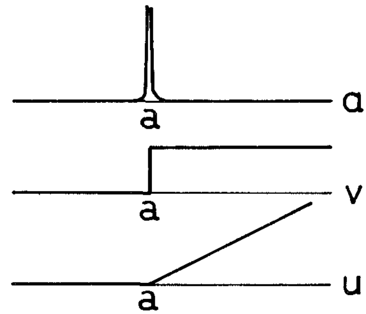

図-4　ステップ荷重を受ける棒中の加速度，速度，変位

δ関数で表わされるような加速度を受け，その瞬間，速度の増分は v となる。　このことを参考に離散化した状態での時刻 n+1 での変位を書くと

$$u_j^{n+1}=u_j^n+v_j^n\Delta t+v\Delta t \quad ---(9)$$

となる。　ここで v として先の式より α で表わすと

$$u_j^{n+1}=u_j^n+v_j^n\Delta t+\alpha_j^n\Delta t^2 \quad ---(10)$$

となる。　この式は α_j^n なる加速度が時間間隔 Δt の間継続して作用するのではなく，波頭の到達した瞬間に $\alpha_j^n\Delta t$ をまとめて受けるとしたものになる。

いまこの式を先の中央差分により求めた式と比較すると第2項のみ異っているが，$c\Delta t/\Delta x=1$ のときには $v_j^{n-1/2}=v_j^n$ であり両者は一致する。

さらにオーバーシュートと振動とする原因の一つとして棒端の集中質量の問題がある。　いま棒端の集中質量が代表する距離を波頭が通過するに要する時間は $\Delta t'=\frac{1}{2}\Delta t$ であり，しかるに積分の時間刻み間隔は Δt である。　このため上記の方法で逐次解析を行うと，棒端の点では速度増分が2倍となることになる。　そのため，集中質量有限要素法を用いて計算する場合，端点のみについては質量を2倍するか，荷重を1/2にするかといった操作が必要となる。

この方法により計算された結果は先の中央差分法による計算結果とほぼ同じになるのはいうまでもないことである。