積分方程式による浸透流問題の解析

山口大学工学部　正会員　中川浩二
○防府市役所　正会員　京免宏行

1　はじめに

浸透流問題は有限要素法の発展とともに、種々の条件下の問題について解かれている。本研究は、この浸透流問題を積分方程式を利用して解くものである。ここでいう積分方程式による解法とは、微分方程式の主要解（基本特異解）を用いて、Green の定理により微分方程式を積分方程式に変換し、数値解析するものである。積分方程式による解法は有限要素法と同様、境界を比較的自由に取りうるのみならず、有限要素法と比べて、領域内部に未知数をとる必要がないため、この種の境界値問題に対して取り扱いが簡単であり、また計算時間が短かくてすむという利点を有している。ここでは理想化された定常浸透流問題について考え、二，三の境界条件を持つ鉛直堤体内の問題について解いている。

2　積分方程式を用いたラプラスの方程式の境界値問題の解法

2次元ラプラスの方程式　$\nabla^2 u = 0$　を積分方程式に変換し、数値解析することを考える。ラプラスの方程式の主要解をGで表わすと、

$$\nabla_P^2 G(P,Q) = -\delta(P-Q) \qquad P：変数,\quad Q：特異点のある点$$

となる。よく知られているように、2次元問題の場合，G は、

$$G(P,Q) = -\frac{1}{2\pi}\log\left(\frac{1}{r_{PQ}}\right) = -\frac{1}{2\pi}\log\left(\frac{1}{r}\right)$$

である。2次元場における2つの変数　u，v についてのGreenの公式

$$\iint_S \{u\nabla^2 v - v\nabla^2 u\}\,dx\,dy = -\int_C \left\{u\frac{\partial v}{\partial n} - v\frac{\partial u}{\partial n}\right\} dS$$

において、u としてラプラスの方程式の解，v として主要解Gを取ると，上式は，

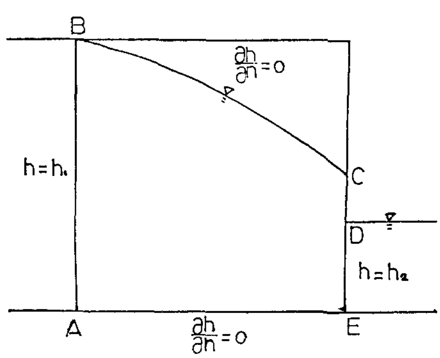
$$\int\left\{u(P)\frac{\partial}{\partial n}G(P,Q) - G(P,Q)\frac{\partial u(P)}{\partial n}\right\} ds = \begin{cases} 0 & Q\in D_e \\ \frac{1}{2}u(Q) & Q\in C \\ u(Q) & Q\in D_i \end{cases}$$

となる。ここで、D_i，C　D_e は考えている領域の内部、境界上，外部を表わす。いまここで境界C上について考えると　右辺は、$\frac{1}{2}u(Q)$ となり、この式は境界上で $u(P)$，$\frac{\partial u(P)}{\partial n}$ どちらかの関数が与えられている時、他の関数に関する積分方程式を構成することになる。数値解析に関しては、境界を適当数に分割し，その分割数に応じた $u(P)$ $\frac{\partial u(P)}{\partial n}$ の代表値を未知数とする連立方程式を解くことになる。

3　自由水面をもつ鉛直堤体内の浸透流問題

図－1のような鉛直堤体を考える。解析領域はＡＢＣＤＥであり、u に対応する関数として，水頭値 h を取ると、境界条件は、

ＡＢ：$h = h_1$　　ＢＣ；$\frac{\partial h}{\partial n} = 0$，$h = y$
ＣＤ；$h = y$　　ＤＥ；$h = h_2$
ＥＡ；$\frac{\partial h}{\partial n} = 0$



図－1

となる。前述のように境界を適当な数に分割，離散化しそれぞれの区間では，h および $\frac{\partial h}{\partial n}$ の値は一定とする。さらに上記の境界条件を代入することにより，多元連立1次方程式を構成し，それを解いて，それぞれの境界領域についての h あるいは $\frac{\partial h}{\partial n}$ を求めることになる。この場合最初C点は未知であり，適当にC点を仮定し，BC境界上に $\frac{\partial h}{\partial n}=0$ の境界値を与える。その結果，求められたBC上の他の境界条件 $h=y$ を満足するように曲線BCを仮定し直し，この計算をくり返して収束させる。図-2は収束の過程と7回のくり返し計算の結果を示している。（$h_2=0$ としてAB, BC, CD, EAを各10分割）

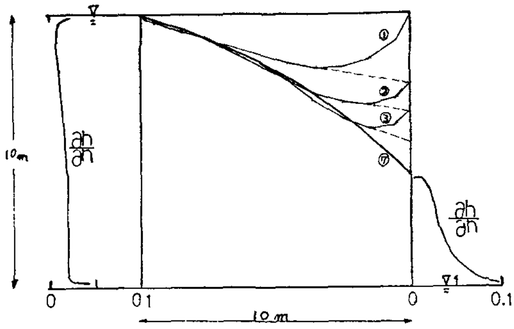


図-2

4　2層流問題の解析

2層流問題としてはよく知られているものとして石油一地下水の境界面問題，海岸地下水における塩水浸入問題がある。これらはいずれも一方が静止した状態として扱われることが多いが異った比重と粘性とを持った2種類の浸透流の平衡問題である。理想的な例として鉛直堤体内の淡塩水の2層浸透流問題を解析し，さらにその応用として，海岸地下水の塩水クサビ境界の問題について考える。なお，淡塩両層の混合，抵抗は無視している。

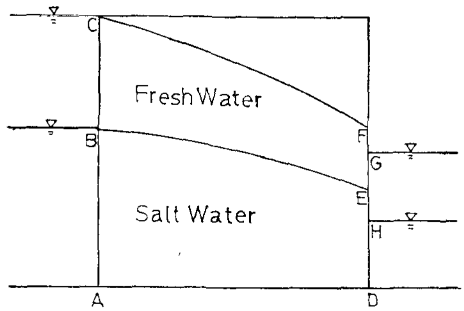


図-3

図-3において，境界条件は，塩水層については，

AB；$h_s = y_{BA}/\gamma_s + y_{AB}$　　EH；$h_s = (y_{DH} + y_{GH} - y)/\gamma_s + y$

HD；$h_s = y_{GH}/\gamma_s + y_{DH}$　　BE；$P_s = P_f$　$\frac{\partial h_f}{\partial n} = \frac{\partial h_s}{\partial n} = 0$

ここで，添字 f は淡水層，s は塩水層を示す，解析法は仮定した水面形に対し，自由水面，境界面では $\frac{\partial h}{\partial n}=0$ の境界条件を用い，2層各々別個に境界での水頭を求める。求められた水頭値から境界面での圧力が等しくなり，また自由水面での水圧が0となるように自由面，境界面位置を仮定し直し　水面形を順次収束させるものである。

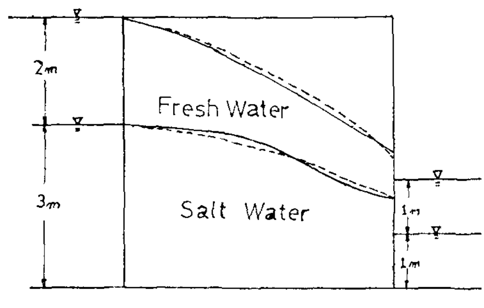


図-4

図-4には図中に与えた境界条件に対する計算結果を示している。（境界分割数，塩水層44，淡水層26　くり返し回数6回）。また図中破線は同じ問題を有限要素法を用いて解いたものを併せて示したものである。図-5はこの応用例として，海岸地下水の塩水クサビ問題を扱ったものである。この場合，上下流面が淡水および塩水の単一層となるため境界条件は簡単になり，

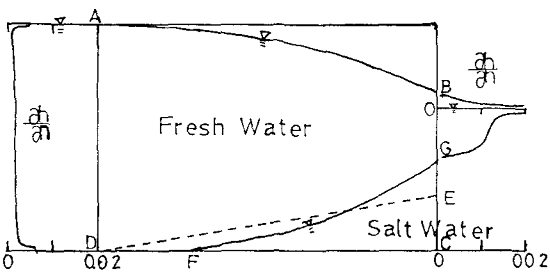


図-5

AB；$h_s = y_{AB}$，OG；$h_f = (y_o - y)\cdot\gamma_s + y$，GC；$h_s = y_o$，FG；$h_s = h_f$，$\frac{\partial h_f}{\partial n} = \frac{\partial h_s}{\partial n} = 0$

となる。E点を適当に仮定し，DEを境界面としてDE面で $\frac{\partial h}{\partial n}=0$ の境界条件より両層を別に解き，境界条件を満足するように境界面及び自由水面を順次収束させたものを示している。